Analysis II für M, LaG/M, Ph
7. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
03.12.2010

Aufgaben

Aufgabe T7.1
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die so definiert ist:

$$f(x,y) = x^3y^2 + 4xy - 2x^2 + y^3.$$

(a) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $T_p^2 f(x,y)$ von f in der Stelle $(1,1)$.

(b) Unter Verwendung des $T_p^2 f(x,y)$ berechnen Sie eine Approximation von $f(1.1, 0.95)$.

Aufgabe T7.2
Bestimmen Sie alle differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die $f'(x,y) = (f(x,y)\ f(x,y))$ (d.h. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = f(x,y)$) für alle $x,y \in \mathbb{R}$ und $f(0,0) = 1$ gilt.
Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{e^x \cdot e^y}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe T7.3 (Formel von Leibniz)
Gegeben seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, n$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$, die $|\alpha|$-mal partial differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass

$$D^\alpha(fg)(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n, \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x) \tag{1}$$

wobei $\beta \leq \alpha$ genau wenn $\beta_i \leq \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$, und

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} := \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!},$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n, \beta \leq \alpha$.
Hinweis. Benutzen Sie Induktion über die Dimension n.