Analysis II für M, LaG/M, Ph
6. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
26.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T6.1 (Die Exponentialfunktion für Matrizen)
Die Exponentialfunktion für Matrizen $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben. Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\|$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergent ist. (Sie dürfen das natürlich auch gerne beweisen.)

(a) Zeigen Sie, dass exp wohldefiniert ist.

(b) Berechnen Sie die Exponentialfunktion von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es seien $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und P invertierbar. Zeigen Sie, dass $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P$ gilt.

(d) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullmatrix).

Aufgabe T6.2
Gegeben seien zwei Funktionen $f, F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wobei f stetig differenzierbar ist und $\nabla f(x) = x \cdot F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_2 = \|y\|_2$ gilt.