Analysis II für M, LaG/M, Ph
4. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
12.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T4.1
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

(Lipschitz-)stetig ist.

Aufgabe T4.2 (Lemma von Urysohn)
Beweisen Sie die folgende Aussage: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$, für die $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in A$ und $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in B$ gilt.

Aufgabe T4.3
Zeigen Sie, dass die Supremumsnorm in $\mathbb{R}^n$ nicht durch ein Skalarprodukt definiert werden kann. Das heißt, es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.