Analysis II für M, LaG/M, Ph
3. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
05.11.2010

Aufgaben

Aufgabe T3.1

(a) Gegeben sei der metrische Raum $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ und die Menge $A = (0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{A} = [0, 1] \quad \text{und} \quad A^\circ = (0, 1).$$

Hinweis. Es gilt $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

(b) Gegeben sei der metrische Raum $X = (0, 1] \cup (2, 3)$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$ und die Menge $A = (0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{A} = (0, 1] \quad \text{und} \quad A^\circ = (0, 1].$$

Aufgabe T3.2

(a) Sei $A = \cap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $B = \cap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n})$ und $C = \cup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Zeigen Sie, dass

$$A = \{0\}, \quad B = \emptyset, \quad C = (0, 1).$$

Hinweis. Es gilt $x \in \cap_{i \in I} A_i$ genau wenn für jedes $i \in I$, $x \in A_i$ und $x \in \cup_{i \in I} A_i$ genau wenn ein $i_0 \in I$ existiert, sodass $x \in A_{i_0}$.

(b) Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) und offene Mengen A_i, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cup_{i \in I} A_i$ auch offen ist.

(c) Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) und offene Mengen $A_1, \dots, A_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \cap_{k=1}^{n} A_k$ auch offen ist.

Aufgabe T3.3

Gegeben sei ein Vektorraum V und zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf V, für die es $A, B > 0$ gibt, sodass

$$A \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B \cdot \|x\|_1$$

für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ und für alle $x \in V$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \quad \text{genau wenn} \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x.$$