Analysis II für M, LaG/M, Ph
1. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Apl. Prof. Christian Herrmann
Vassilis Gregoriades
Horst Heck

WS 2010/11
22.10.2010

Aufgaben

Aufgabe T1.1

(a) Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Funktion λf auch eine Treppenfunktion ist und $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

(b) Sei $Z_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a, b]$. Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ und eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ gegeben, sodass $f(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Für jede Zerlegung $Z_2 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ des Intervalls $[a, b]$, für die $Z_1 \subseteq Z_2$ gilt, bestimme man $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{K}$, sodass $f(x) = d_j$ für alle $x \in (y_{j-1}, y_j)$.
Hinweis. Zeigen Sie erstes, dass für jedes $j = 1, \ldots, m$ ein einziges $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $[y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$. Daraus kann man d_j bestimmen.

(c) Seien $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f + g$ auch Treppenfunktion ist und

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass es eine gemeinsame Zerlegung $Z = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ und $a_1, \ldots, a_N$, $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$ gibt, sodass $f(x) = a_k$ und $g(x) = b_k$ für alle $x \in (z_{k-1}, z_k)$.

(d) Seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\lambda f + \mu g$ auch Treppenfunktion ist und

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

(e) Es seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ sprungstetige Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

(f) Zeigen Sie, dass es für jede Treppenfunktion $f : I \to \mathbb{K}$ die Funktion $|f|$ auch Treppenfunktion ist und

$$|\int_I f| \leq \int_I |f|$$

gilt.

Aufgabe T1.2 (Lemma 30.11)

(a) Sei eine Menge $A \neq \emptyset$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gibt, sodass $|f(x_n)| \to \infty$.

(b) Sei eine Menge $A \neq \emptyset$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es eine monotone Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gibt, sodass $|f(y_n)| \to \infty$.
Hinweis. Benutzen Sie Lemma 10.8.

(c) Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass es eine monotone Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ und ein $x_0 \in [a, b]$ gibt, sodass $x_n \to x_0$ und $|f(x_n)| \to \infty$.

(d) Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass f nicht sprungstetig ist. Also ist jede sprungstetige Funktion beschränkt.