Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
5. Dezember 2008

9. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$, für alle $z \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{x\to z+} f_i(x)$, $\lim_{x\to z-} f_i(x)$ und $\lim_{x\to z} f_i(x)$, soweit diese existieren. Bestimmen Sie außerdem $\lim_{x\to+\infty} f_i(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f_i(x)$, $i = 1, \dots, 4$, sofern existent.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ für $x \in D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

(b) $f_2(x) = \frac{\sqrt{|x|}-3}{x-9}$ für $x \in D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{9\}$

(c) $f_3(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$ für $x \in D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(d) $f_4(x) = \frac{2x}{x^2-5x}$ für $x \in D(f_4) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x \neq 0\}$

Aufgabe G2 ()

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (mit Beweis!).

- $f(0) = \frac{1}{2}$
- $f(4) = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 2-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to 2+} f(x) = \infty$

Aufgabe G3 ()

Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

(a) mittels geometrischer Überlegungen.

(b) indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Ergebnisse ausnutzen.

Aufgabe G4 ()

Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

für $x, y \in D(f) = \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst für $a \in \mathbb{N}$, dann für $a \in \mathbb{Z}$, für $a \in \mathbb{Q}$ und zuletzt für $a \in \mathbb{R}$, dass für obige Funktionen gilt: $f(ax) = af(x)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Zeigen Sie die Existenz der folgenden Limiten und bestimmen Sie ihre Werte:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

(c) $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0,3]$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1], \\ ax - x^3 + x & \text{für} \quad x \in]1,2[, \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für} \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a und b so, dass f auf $D(f)$ stetig ist.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $y \in \mathbb{Q}$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $y, z \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \setminus \{x\}$ existieren.