



8. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

(a) Bestimmen Sie ein Polynom f vom Grad $n \leq 3$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \dots, 3$, wobei

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	-1
y_i	1	1	3	-3

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten des Interpolationspolynoms aus (a) in der Darstellung

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

(c) Berechnen Sie für das Polynom $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x) = x^2 - 12345678x - 12345678$ für $x \in D(p) = \mathbb{R}$ den Wert $p(12345679)$

(i) mit dem Taschenrechner, (ii) mit dem Hornerchema.

Welcher Wert ist der richtige? Was ist passiert?

Aufgabe G2 ()

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen $M_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$ die Menge der Häufungspunkte $H(M_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

$$M_1 =]2, 3[, \quad M_2 = \{1, 7, 10, 11\}, \quad M_3 = \mathbb{R} \setminus ([2, 3] \cup [-1, 0]), \quad M_4 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Gibt es eine Teilmengenbeziehung zwischen einer Menge M und $H(M)$?

Aufgabe G3 ()

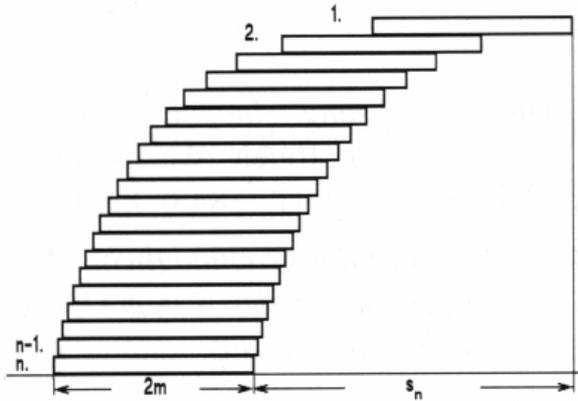
(a) Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt der Menge \mathbb{Q} ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{Q}$ ein Häufungspunkt der Menge \mathbb{Q} ist. Überlegen Sie zunächst, ob Sie hierfür auch den Hinweis benutzen können. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass für jede reelle Zahl x und jedes $\varepsilon > 0$ das Intervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ eine rationale Zahl enthält.

Aufgabe G4 ()

Mit n gleich großen, übereinandergestapelten Betonplatten der Länge 2m soll eine Brücke gebaut werden. Da in der heutigen Zeit Betonplatten sehr teuer sind, sollen die Platten jeweils nach einer Seite so weit wie möglich verschoben werden, ohne dass diese umkippen. Hierzu nummeriere man die Platten von oben nach unten und berechne über die Rechenregeln für Schwerpunkte die maximale Verschiebung s_n . Was ergibt sich für s_n für $n \rightarrow \infty$? Welche Strecke kann man also überbrücken?



Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Die größte mögliche Belastung B einer eisernen Kette mit Kettenglieddurchmesser d wurde für einige Werte von d ermittelt:

$d(\text{mm})$	6	8	16	20
$B(\text{kg})$	225	400	1600	2500

Bestimmen Sie ein Polynom vom Grad $n \leq 3$, das die Interpolationsbedingung zu diesen Daten erfüllt.

Weitere Messwerte sind

$d(\text{mm})$	11	13	18	25	30
$B(\text{kg})$	750	1050	2000	3900	5600

Berechnen Sie die durch Ihr Interpolationspolynom an diesen Stellen gegebenen Werte und vergleichen Sie diese.

Aufgabe H2 (14 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3}.$$

- (a) Bestimmen Sie $D(f)$.
- (b) Bestimmen Sie für alle $z \in \mathbb{R}$ die Ausdrücke $\lim_{x \rightarrow z^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow z} f(x)$, soweit diese existieren. Bestimmen Sie außerdem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, sofern existent.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Es seien $(n + 1)$ Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, \dots, n$, mit paarweise verschiedenen x_i gegeben. Dann gibt es

- kein Polynom
 genau ein Polynom
 unendlich viele Polynome

vom Grad $n + 1$, welche der Interpolationsbedingung genügen. Begründen Sie Ihre Antwort.