



6. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!}, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+2}{4n^3+1},$$
$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}, \quad (v) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Hinweis zu (v): $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Aufgabe G2 ()

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \geq 0$ gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

(b) Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$. Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die folgende Aussage aus der Vorlesung.

*Falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $c_n \geq 0$ für alle $n \geq m$,
so konvergiert $(\sqrt{c_n})_{n \geq m}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n} = \sqrt{c}$.*

Aufgabe G3 ()

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für falsche Aussagen jeweils ein Gegenbeispiel an.

- (a) Jede Nullfolge ist konvergent.
- (b) Jede konvergente Folge ist monoton.
- (c) Eine Folge, welche monoton und beschränkt ist, ist konvergent.
- (d) Jede beschränkte Folge konvergiert gegen 0.
- (e) Jede monoton wachsende Folge ist divergent.
- (f) Jede divergente Folge ist monoton.
- (g) Die Summe zweier konvergenter Folgen konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^2+\dots+n^2}{n^3}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n \right), \quad (iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4}.$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Es bezeichne $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n > 0 \iff \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m : c_n > 0.$$

Entscheiden Sie für beide Implikationen, ob sie wahr oder falsch sind, und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe H3 (10 Punkte)

Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a . Wir nennen diese Figur T_0 . Daraus bilden sich rekursiv die Figuren $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ nach folgendem Gesetz: *Ersetze jedes geradlinige Berandungsstück durch vier Strecken, indem über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird.*

- Veranschaulichen Sie sich die obige Konstruktion, indem Sie die Figuren T_0, T_1 , und T_2 skizzieren.
- Stellen Sie Rekursionsformeln zur Darstellung des Flächeninhalts und des Umfangs der Figur T_n auf.
- Untersuchen Sie die Formeln für Flächeninhalt und Umfang auf Konvergenz in n und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.