Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
7. November 2008

5. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Beschränktheit von Folgen)

Untersuchen Sie die Folgen auf Beschränktheit.

(a) $c_n = c_0 \cdot q^n$, wobei $c_0, q \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$,

(b) $e_0 = 1$ und $e_{n+1} = (n+1)e_n$ für $n \geq 0$,

(c) $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$.

Was können Sie über die Konvergenz der Folgen auf Grund ihrer Beschränktheit bzw. Unbeschränktheit aussagen?
Hinweis zu (b): Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $e_n \geq n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe G2 (Konvergenz von Folgen)

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = (-1)^n 42$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$,

(c) $c_n = \frac{5n+2}{n}$, $n \geq 1$.

Aufgabe G3 (Komplexe Konjugation)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$ für $z \in D(f) = \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $f(z_1) \cdot f(z_2) = f(z_1 z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(b) $f(z_1) + f(z_2) = f(z_1 + z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(c) f ist bijektiv.

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f.
Bemerkung für mathematisch Interessierte: Die Funktion f und die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = z$ für $z \in D(g) = \mathbb{C}$ sind die beiden einzigen Funktionen, die obige Bedingungen auf $\mathbb{C}$ erfüllen.

Hausübung

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = \frac{1}{3^n - n}$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = n^2$, $n \geq 0$,

(c) $c_n = \frac{(n+2)^2}{n^3 - n + 1}$, $n \geq 0$.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zuerst mittels vollständiger Induktion $3^n \geq 2n$.

Aufgabe H2 (8 Punkte)

Widerlegen Sie folgende Aussagen, indem Sie geeignete Gegenbeispiele konstruieren.

(a) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(b) Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(d) Seien die beiden Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ divergent gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞ und $b_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$, dann ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 0}$ beschränkt.

Aufgabe H3 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, d. h.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(b) Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, d. h.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(c) Überlegen Sie sich geometrisch, woher die Bezeichnung Dreiecksungleichung stammt.