Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
31. Oktober 2008

# 4. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

## Gruppenübung

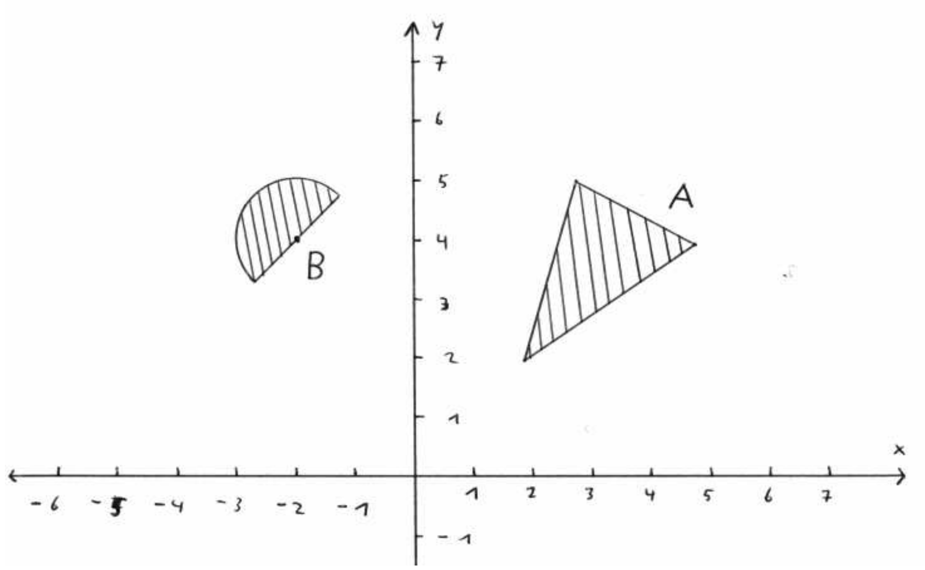
**Aufgabe G1** ()

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z_o z$ für $z \in D(f) = \mathbb{C}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

[( )] Die Funktion $f$ ist injektiv für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
[( )] Die Funktion $f$ ist surjektiv für kein $z_0 \in \mathbb{C}$.
[( )] Die Funktion $f$ ist injektiv für $z_0 = 1$.
[( )] Die Funktion $f$ ist injektiv für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
[( )] Die Funktion $f$ ist genau dann nicht surjektiv, wenn $z_0 = 0$.

**Aufgabe G2** ()

(a) Beschreiben Sie die Mengen $A$ und $B$ jeweils durch ein System von Gleichungen und/oder Ungleichungen.




(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 - x + y \leq 0 \wedge y \geq 1\},$$
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}.$$

**Aufgabe G3** ()

(a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z_1 = i^3, \quad z_2 = (2+i) \cdot \overline{(-1+6i)}, \quad z_3 = \frac{3+2i}{1-i} - \frac{5+i}{3+i}.$$

(b) Beweisen Sie das Kommutativgesetz der Multiplikation für komplexe Zahlen, d.h. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

**Aufgabe G4** ()

Beweisen Sie das Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

## Hausübung

**Aufgabe H1** (8 Punkte)

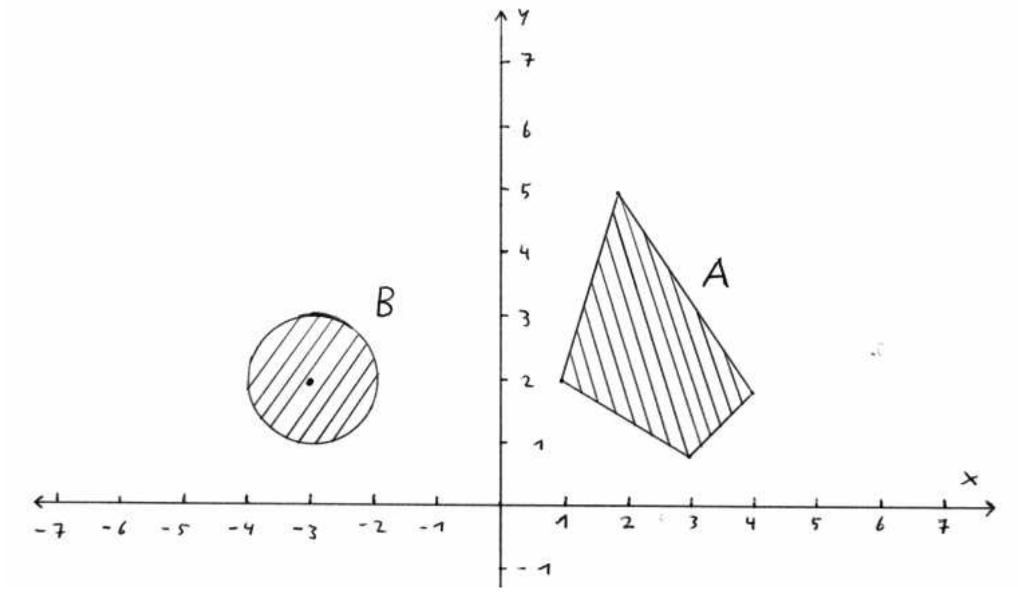
(a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z_1 = i^4, \quad z_2 = (3+i) \cdot \overline{(-1+2i)}, \quad z_3 = \frac{(1+2i)^2}{2+3i}, \quad z_4 = \left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2.$$

(b) Beweisen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation für komplexe Zahlen, d.h. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

**Aufgabe H2** (12 Punkte)

(a) Beschreiben Sie die Mengen $A$ und $B$ jeweils durch ein System von Gleichungen und/oder Ungleichungen.




(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y - x \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 + x - y \geq 0\}.$$

**Aufgabe H3** (6 Punkte)

Gegeben ist ein Punkt $P$, der bezüglich des $(x, y)$-Koordinatensystems die Koordinaten $(2, 3)$ hat. Nun wird das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ gedreht, es entsteht ein neues Koordinatensystem, das $(x', y')$-System.

(a) Bestimmen Sie durch eine entsprechende Skizze die ungefähren Koordinaten des Punktes $P$ im $(x', y')$-System.

(b) Bestimmen Sie die neuen Koordinaten mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Formel.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P'$ im $(x, y)$-System, der durch Drehung um $\frac{7\pi}{4}$ aus $P$ hervorgeht. Vergleichen Sie diese mit den Koordinaten des Punktes $P$ im $(x', y')$-System.