Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
27. Oktober 2008

3. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und VI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()
Sei

$$x_{n+1} = \frac{500x_n}{x_n + 100}$$

für $n \geq 0$ und $x_0 = 5000$.

(a) Berechnen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $x_n \geq 400$ für $n \geq 0$.

Aufgabe G2 ()
Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ für $x \in D(h) = \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von h.

(b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Funktion h.

(c) Bestimmen Sie die Bildmenge von h (Beweis!).

(d) Ist h injektiv und/oder surjektiv? Begründen Sie sorgfältig!

(e) Wie kann man die Definitionsmenge und/oder den Wertebereich so verändern (falls notwendig), dass h injektiv bzw. surjektiv ist?

Aufgabe G3 ()
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv.

(a) Bestimmen Sie $g_1 = f \circ f^{-1}$ und $g_2 = f^{-1} \circ f$. Geben Sie auch die jeweilige Definitionsmenge und die jeweilige Bildmenge an.

(b) Gilt $g_1 = g_2$?

Aufgabe G4 ()

(a) Bestimmen Sie

$$s = \sum_{k=1}^{100} k^6 + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^6].$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Wert (in Abhängigkeit von n) von

$$t(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Sind folgende Funktionen surjektiv? Sind sie injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 3z$ für $z \in D(f) = \mathbb{Z}$

(b) $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit $g(x) = |x - 1|$ für $x \in D(g) = \mathbb{R}$

(c) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $h(x) = 3x$ für $x \in D(h) = \mathbb{Q}$

Aufgabe H2 ()

Sei $x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + 4$, $n \geq 0$.

(a) Bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4 für $x_0 = 120$.

(b) Zeigen Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ mit vollständiger Induktion

$$x_n = (x_0 - 20) \cdot (\frac{4}{5})^n + 20, \quad n \geq 0.$$

Aufgabe H3 ()

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für $x \in D(f) = \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = n + 2$ für $n \in D(g) = \mathbb{N}$ und h wie in Aufgabe G2.

(a) Bestimmen Sie die Bildmenge von f und g (Beweis für g!).

(b) Bestimmen Sie $(h \circ f)(\frac{3}{2})$ und $(f \circ h)(\frac{3}{2})$. Können Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für $h \circ f$ angeben?

(c) Sind die Funktionen f und g injektiv? Sind sie surjektiv? Begründen Sie sorgfältig!

(d) Wie kann man die Definitionsmenge und/oder den Wertebereich so verändern (falls notwendig), dass die Funktionen f und g injektiv bzw. surjektiv sind?