Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
20. Oktober 2008

2. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

(a) Schreiben Sie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{625}$$

als geschlossenen Ausdruck mit dem Summenzeichen.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} n^2, \qquad \sum_{i=1}^{5} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2^2$$

jeweils ohne Summenzeichen und berechnen Sie die jeweiligen Werte.

Aufgabe G2 ()

Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(a) direkt,

(b) durch vollständige Induktion.

Aufgabe G3 ()

Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}, \quad M_3 = \{n \in \mathbb{N} : 2 \text{ ist Teiler von } n\}.$

(a) Bestimmen Sie

(i) $M_1 \setminus M_2$, (ii) $M_3 \cup M_2$, (iii) $M_1 \cap M_3$

und skizzieren Sie diese Mengen.

(b) Geben Sie für die Mengen M_1, M_2 und M_3 jeweils zwei obere und zwei untere Schranken an, falls diese existieren.

(c) Bestimmen Sie für die Mengen M_1, M_2 und M_3 jeweils Supremum und Infimum, falls sie existieren, und geben Sie an, ob sie in der jeweiligen Menge liegen.

(d) Beweisen Sie $M_2 \subset M_1$.

Hinweis zur Hausübung: Für die Aufgaben H3 (a) (i) und (ii) ist es hinreichend, jeweils in einem Fall einen korrekten Beweis aufzuschreiben.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Für zwei natürliche Zahlen a und b sagen wir „a teilt b", wenn $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$8 \text{ teilt } (9^n - 1).$$

Aufgabe H3 (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$M_1 := [5, \infty[, \quad M_2 :=]2, 3], \quad M_3$: Menge aller Primzahlen,

M_4 : Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 5 > 4$ über den reellen Zahlen.

(i) Geben Sie jeweils zwei obere und zwei untere Schranken an, falls sie existieren.

(ii) Bestimmen Sie, falls vorhanden, jeweils Infimum und Supremum. Liegen sie in der jeweiligen Menge?

(b) Sei $V_k := \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Vielfachen der natürlichen Zahl k. Zeigen Sie die Aussage $V_4 \subset V_2$.