Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/2009
9. Februar 2009

15. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel oder der partiellen Integration:

$$\text{(a)} \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe G2 ()

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.
Hinweis: Vergleichskriterium!
Vorschlag für Interessierte: Versuchen Sie, diese Funktion auf Ihrem Computer numerisch zu integrieren, z.B. mit der Mittelpunktregel.

Aufgabe G3 ()

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

für $x \in D(f) = [\pi, \infty[$. Zeigen Sie, dass f über $[\pi, \infty[$ nicht uneigentlich integrierbar ist.
Hinweis: Die Folge $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_1^e x\ln(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_2^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{(d)} \int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis zu (d): Verwenden Sie den Ansatz $\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H2 ()

Untersuchen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale und bestimmen Sie gegebenenfalls das Integral:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe H3 ()

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

für $x \in D(f) =]0, \infty[$. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.