



# 13. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

## Gruppenübung

### Aufgabe G1 ()

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 2 \sin(x)$  für  $x \in D(f) = ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

- Geben Sie die Bildmenge von  $f$  an (ohne Beweis!).
- Zeigen Sie, dass  $f$  eine Umkehrfunktion  $g$  besitzt. Geben Sie auch die Definitionsmenge und die Bildmenge von  $g$  an (ohne Beweis!). Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $g$ .
- Skizzieren Sie  $f$  und  $g$ .
- Berechnen Sie die Ableitung von  $g$  direkt und mit Hilfe des Satzes III.3.1. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

### Aufgabe G2 ()

Berechnen Sie  $y_0 = \ln(2)$  mit dem Bisektionsverfahren mit einer Genauigkeit von  $4 \cdot 10^{-2}$ , indem Sie nur die Exponentialfunktion verwenden.

### Aufgabe G3 ()

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \text{ für } x \in D(f) = [0, 3].$$

- Bestimmen Sie die Bildmenge von  $f$  (Beweis!).
- Zeigen Sie, dass  $f$  eine Umkehrfunktion  $g$  besitzt und bestimmen Sie diese.
- Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion  $g$  direkt und mit Hilfe des Satzes III.3.1. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

## Hausübung

### Aufgabe H1 (7 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \cos(2x)$  für  $x \in D(f) = ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

- Geben Sie die Bildmenge von  $f$  an (ohne Beweis!).
- Zeigen Sie, dass  $f$  eine Umkehrfunktion  $g$  besitzt. Geben Sie auch die Definitionsmenge und die Bildmenge von  $g$  an (ohne Beweis!). Bestimmen Sie die Umkehrfunktion  $g$ .

(c) Skizzieren Sie  $f$  und  $g$ .

(d) Berechnen Sie die Ableitung von  $g$  direkt und mit Hilfe des Satzes III.3.1. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

**Aufgabe H2** (4 Punkte)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze die Umkehrfunktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze die Umkehrfunktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie  $f = h$  (Denken Sie auch an die Definitionsmenge!).

**Aufgabe H3** (4 Punkte)

Zeigen Sie

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad x, y > 0.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Identität  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .