Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
19. Januar 2009

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

(a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion zweimal differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zweite Ableitung.

Aufgabe G2 ()

Bestimmen Sie nur mit Hilfe der ersten Ableitung alle Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x - 2$$

für $x \in D(f) = [-5, 3]$. Welche der Extremstellen sind globale Extremstellen?

Aufgabe G3 ()

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$

Aufgabe G4 ()

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{1 + 4x^2}$$

für $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f'(x)| \leq 2$.

(b) Folgern Sie damit, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie nur mit Hilfe der ersten Ableitung alle Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

für $x \in D(f) = [-5, 5]$. Welche der Extremstellen sind globale Extremstellen?

Aufgabe H2 (8 Punkte)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

für $x \in D(f) = [0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Sei $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass ein $x_0 \in]0, x[$ existiert mit

$$\frac{\tan x}{x} = \tan'(x_0).$$

(c) Bestimmen Sie die Ableitung von $\tan x_0$ für $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ die Ungleichung

$$\tan x > x$$

gilt.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist.

(a) Zeigen Sie, dass ein $L > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D(f)$ gilt: $|f'(x)| \leq L$.

(b) Folgern Sie, dass für alle $x, y \in D(f)$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gilt.

(c) Beweisen Sie nun, dass f gleichmäßig stetig ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ihr Minimum und Maximum annimmt.