Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009
12. Dezember 2008

10. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, WI(BI), MaWi, AngGeo und UI“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

für $x \in D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(a) Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie f auf gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe G2 ()

Untersuchen Sie, wie viele Lösungen $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\sin x = \frac{2}{5}$$

besitzt. Bestimmen Sie eine Lösung numerisch mit einer Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-2}$.

Aufgabe G3 ()

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2$$

für $x \in D(f) = [0, 1]$.

(a) Geben Sie die stückweise lineare Interpolation g_n für $n = 3$ von f an. Skizzieren Sie die Graphen von f und g_3.

(b) Bestimmen Sie die Feinheit der Zerlegung, so dass der Fehler $|f(x) - g_n(x)|$ für alle $x \in [0, 1]$ kleiner als 10^{-2} ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (7 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x}$$

für $x \in D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(a) Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie f auf gleichmäßige Stetigkeit.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g_n) = [0, 1]$ die stückweise lineare Interpolation von f auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Feinheit der Zerlegung, so dass der Fehler $|f(x) - g_n(x)|$ für alle $x \in [0, 1]$ kleiner als 10^{-2} ist.

Aufgabe H2 (8,5 Punkte)

Untersuchen Sie, wie viele Lösungen $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$3 \cos x = \sin 3x$$

besitzt. Bestimmen Sie eine Näherungslösung numerisch mit einer Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-2}$.

Aufgabe H3 (8 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, 1]$ stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

(b) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = \mathbb{R}$, so dass die Bildmenge endlich ist.