$T(n)$	Maximale Grösse von n bei vorgegebener Rechenzeit von 0,01 Sekunden	1 Sekunde	1 Minute	1 Stunde
n	10	1 000	60 000	3 600 000
$n \log n$	4	140	4 893	204 094
n^2	3	31	244	1 897
2^n	3	9	15	21
$n!$	3	6	8	9

$T(n)$	Maximale Eingabelänge vor	nach Erhöhung der Rechengeschwindigkeit	Bemerkungen
n	m	$10 \cdot m$	
$n \log n$	m	(fast) $10 \cdot m$	
n^2	m	$3.16 \cdot m$	$10^{1/2} \approx 3.16$
2^n	m	$m + 3.3$	$\log 10 \approx 3.3$
$n!$	m	$\approx m$	

2.3 Die Klassen P und PSPACE

Def: $\mathbf{P} := \bigcup_k \mathrm{DTIME}(n^k)$

$\mathbf{PSPACE} := \bigcup_k \mathrm{DSPACE}(n^k)$

1. Superpolynomielles Wachstum stößt bereits für moderate Eingaben an praktische Grenzen
2. Insbesondere polynomielle Laufzeiten sind i.d.R. gerade die in Praxis handhabbaren.
3. **P** ist eine robuste Klasse, z.B. auch für *k*-Band DTMs, *Registermachinen* oder *Java-Programme*

Bislang nur Entscheidungsprobleme
d.h. Funktionen $f{:}\Sigma^*\to\{0,1\}$; später (Übung)

Def: Funktionsberechnung (**FP**) $f{:}\Sigma^*\to\Sigma^*$

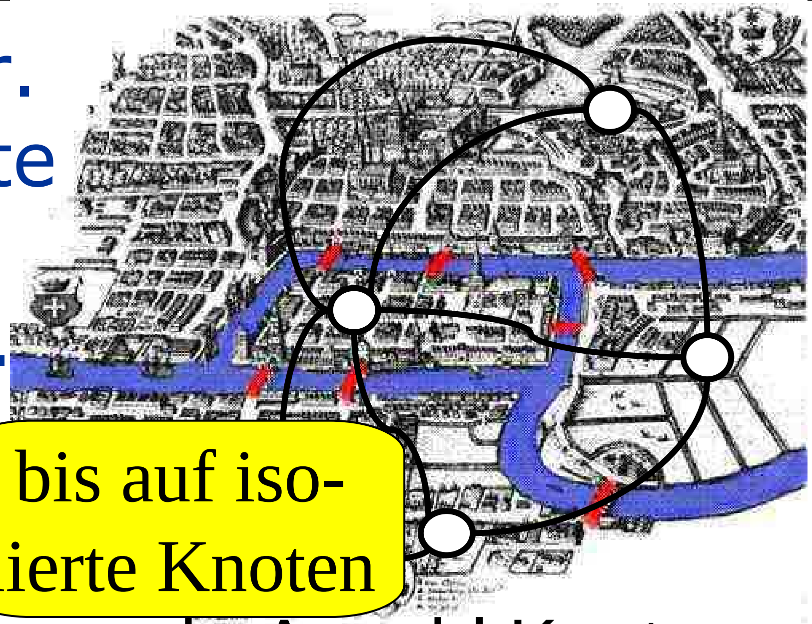
Vorgeplänkel: Graphen und Kodierung

- Ein *gerichteter* Graph $G = (V,E)$ ist eine Menge V von Knoten und $E \subseteq V \times V$ von Kanten
- G heißt *ungerichtet,* wenn $(u,v) \in E \Leftrightarrow (v,u) \in E$
- Ein $c:E \to \mathbb{N}$ heißt Kantengewichtsfunktion.

Als Eingabe an eine Turingmaschine:

- Beschreibe (G,c) durch Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{N}^{V \times V}$
  - $A[u,v] := c(i,j)$ für $(u,v) \in E$,
  - $A[u,v] := *$ für $(u,v) \notin E$
- Bei gerichtetem G: nur obere Dreiecksmatrix.
- $\langle G,c \rangle$ bezeichnet diese Kodierung; $|\langle G,c \rangle| \geq |V|$

Beispielprobleme (I)



Ein Eulerkreis in einem unger. Graph G durchläuft jede Kante genau einmal; ein Hamilton-kreis jeden Knoten genau 1x.

Falls G einen Eulerkreis besitzt, so ist G zusammenhängend, und an jedem Knoten hängt eine gerade Anzahl Kanten.

bis auf isolierte Knoten

Theorem: Umgekehrt besitzt ein zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten eine gerade Anzahl Kanten hat, einen Eulerkreis.

$\mathbf{EC} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ enthält einen Eulerkreis} \} \quad \in \mathbf{P}$

$\mathbf{HC} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ enthält einen Hamiltonkreis} \} \; \mathbf{?}$

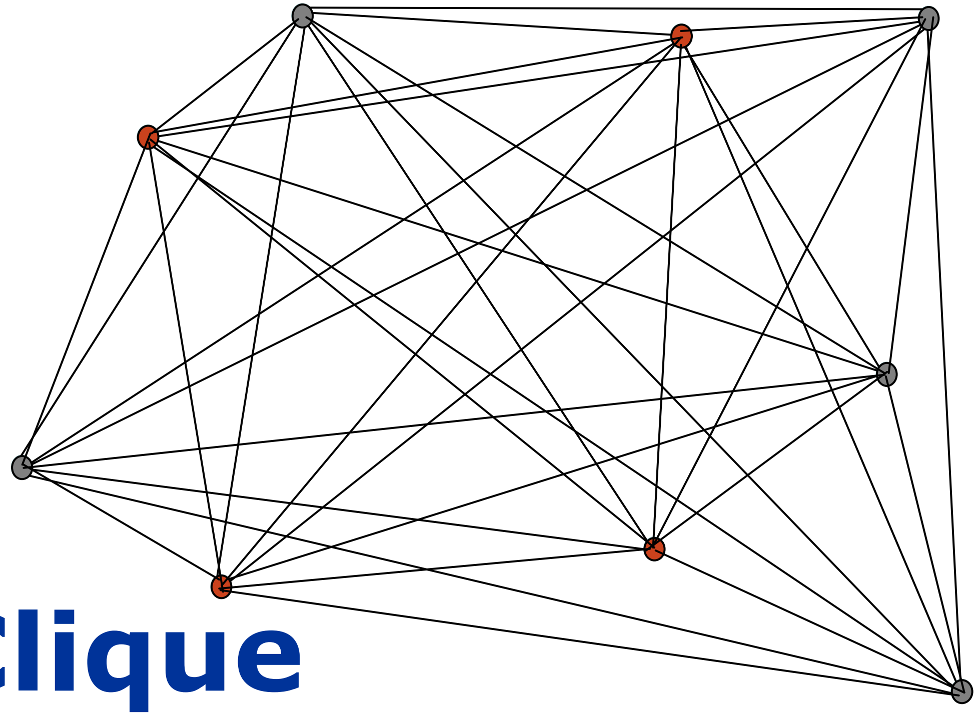
Beispielprobleme (II)

- Eulerkreis **(EC)** vs. Hamiltonkreis **(HC)**
- **Kantenüberdeckung (EC)** vs. $\in$ **P**
- **Knotenüberdeckung (VC)** **?**
- *Travelling Salesperson* **TSP** $:= \{ \langle c,k \rangle :$ c hat einen Hamiltonkreis mit Gewicht $\leq k \}$ **?**
- **CLIQUE** $:= \{ \langle G,k \rangle \mid G$ hat eine k-Clique $\}$ **?**
- *Independent Set* **IS** $:= \{ \langle G,k \rangle :$ G hat eine unabhängige Menge der Größe $k \}$ **?**

VC $= \{ \langle G,k \rangle \mid G=(V,E)$ und $\exists U \subseteq V, |U|=k: \ \forall (x,y) \in E: x \in U \ \vee y \in U \}$ dh. jede Kante hat einen Endpunkt in U

Beziehungen zwischen Problemen

A,*B*$\subseteq \Sigma^*$ Entscheidungsprobleme; schreibe „*A*$\preccurlyeq$*B*“ für „*A* ist höchstens so schwer wie *B*“



Beobachtung:

- **HC $\preccurlyeq$ TSP**
- **Clique $\preccurlyeq$ IS $\preccurlyeq$ Clique**

HC : enthält *G* einen Hamiltonkreis;
TSP: enthält *c* einen Hamiltonkreis mit Gewicht $\leq k$