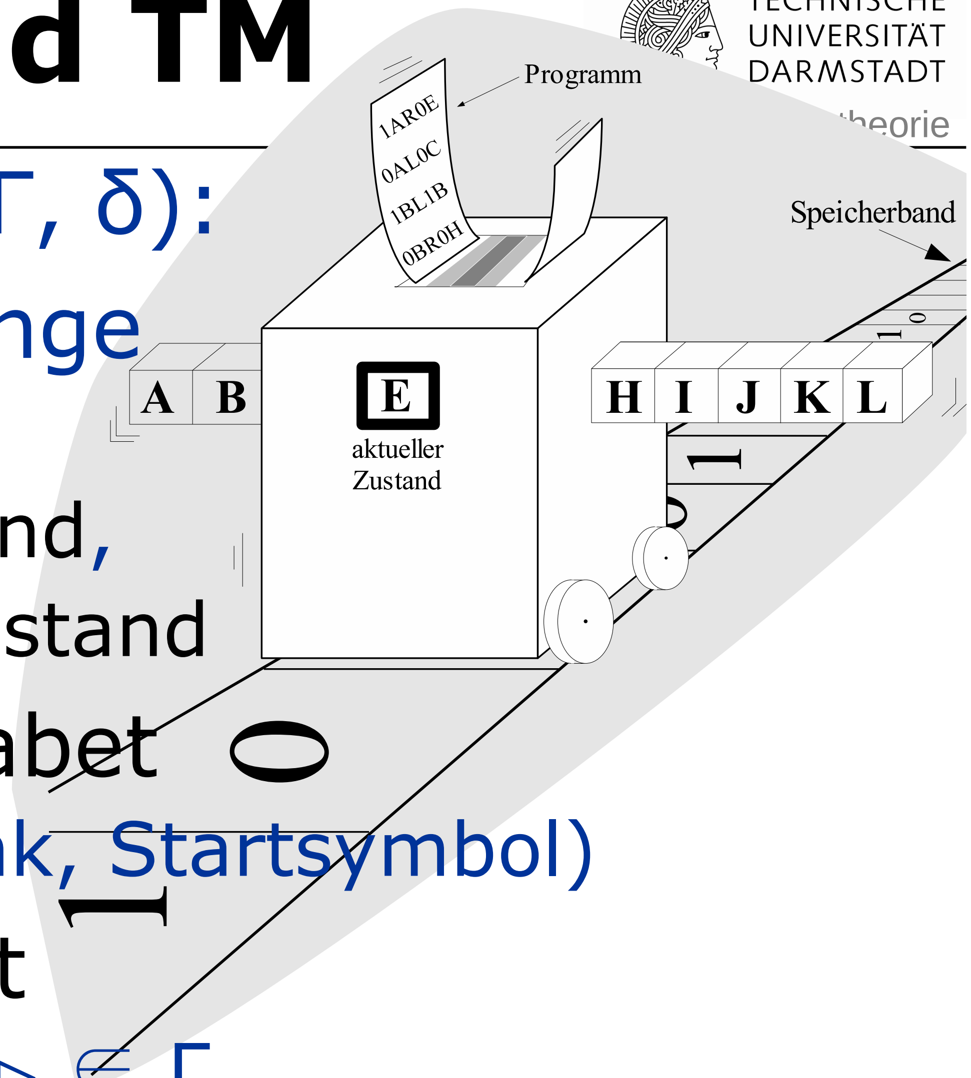
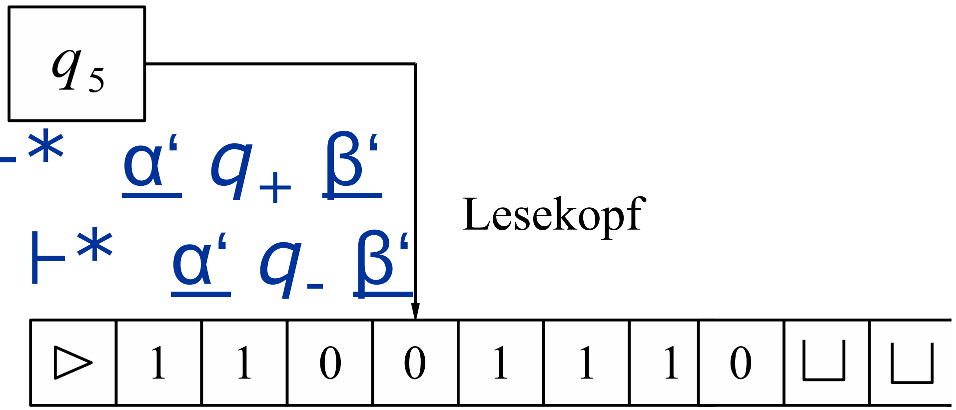
determ. 1-Band TM



- 4-Tupel $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$:
- Q endl. Zustandsmenge
  - mit s=Startzustand,
  - q_+=akzept. Endzustand,
  - q_-=ablehnend. Endzustand
- Σ endl. Eingabealphabet
  - wobei , $\rhd \notin \Sigma$ (Blank, Startsymbol)
- Γ endl. Bandalphabet
  - wobei $\Sigma \subset \Gamma$ und , $\rhd \in \Gamma$.
- $\delta : Q \backslash \{q_+, q_-\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{R, L, N\}$ ist die Übergangsfunktion

Konfiguration, Nachfolge, Rechnung

- $\mathcal{M} = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$; $\Gamma^* =$ { endl. Folgen über Γ }
- Konfiguration: $\underline{\alpha}\ q\ \underline{\beta}$, hier „110 q_5 01110“
  - (jenseits $\underline{\beta}$ nur s; $\underline{\beta}$ hört nicht mit auf)
- ein Schritt gemäß δ: direkte Nachfolgekonfiguration $\underline{\alpha}\ q\ \underline{\beta} \vdash \underline{\alpha'}\ p\ \underline{\beta'}$
- n-te Nachfolgekonfiguration $K \vdash^n \underline{K''}$
- (indirekte) Nachfolgekonfig. $K \vdash^* \underline{K''}$
- $\mathcal{M}$ akzeptiert $\underline{w}$, falls es $\underline{\alpha'},\underline{\beta'} \in \Gamma^*$ gibt mit: $s\ \underline{w} \vdash^* \underline{\alpha'}\ q_+\ \underline{\beta'}$
- $\mathcal{M}$ verwirft $\underline{w}$, falls $s\ \underline{w} \vdash^* \underline{\alpha'}\ q_-\ \underline{\beta'}$



Akzeptanz und Entscheidung

- Die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache ist $L(\mathcal{M}) := \{ \underline{w} : M \text{ akzeptiert } \underline{w} \}$
  - Für $\underline{w} \notin L(M)$ darf $\mathcal{M}$ in ‚Endlosschleife' gehen!
- $\mathcal{M}$ entscheidet $L(\mathcal{M})$, wenn zusätzlich gilt: $\mathcal{M}$ verwirft alle $\underline{w} \in \Sigma^* \setminus L$.
- $L \subseteq \Sigma^*$ heißt semi-entscheidbar, wenn L von einer TM akzeptiert wird;
- L heißt entscheidbar, wenn L von einer TM entschieden wird.

M akzeptiert $\underline{w}$, falls es $\underline{\alpha'}, \underline{\beta'} \in \Gamma^*$ gibt mit: $s\,\underline{w} \vdash^* \underline{\alpha'}\, q_+\, \underline{\beta'}$
M verwirft $\underline{w}$, falls es $\underline{\alpha'}, \underline{\beta'} \in \Gamma^*$ gibt mit: $s\,\underline{w} \vdash^* \underline{\alpha'}\, q_-\, \underline{\beta'}$

Hintergrund Logik

TM $\mathcal{M}=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$ mit Q,Σ,Γ endl. Mengen und $\delta : Q\setminus\{q_+,q_-\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{R,L,N\}$

- Umbenennung ändert die TM nicht wesentlich.
- Über Σ gibt es höchstens abzählbar viele TMs
- aber überabzählbar viele $L\subseteq\Sigma^*$ (Cantor)
- Jede TM semi-entscheidet genau ein $L\subseteq\Sigma^*$.

$\Rightarrow$ *Fast alle* $L\subseteq\Sigma^*$ sind nicht semi-entscheidbar

- Gödel: Wahrheit quantifizierter Aussagen über $\mathbb{N}$ ist nicht semi-entscheidbar; Davis, Robinson, Matiyasevich: Unlösbarkeit diophantischer Gleichungen ist nicht semi-entscheidbar

$L \subseteq \Sigma^*$ heißt semi-entscheidbar, wenn es eine TM gibt, die genau die $\underline{w}\in L$ akzeptiert.

Ressource: Zeit

Sei $\mathcal{M}=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$ eine DTM.

- Ein Rechenschritt ist ein direkter Konfigurationsübergang $\underline{\alpha}\ q\ \underline{\beta} \vdash \underline{\alpha'}\ p\ \underline{\beta'}$
- Für $\underline{w}\in\Sigma^*$ bezeichne $T_{\mathcal{M}}(\underline{w})$ die Anzahl Rechen-schritte, die $\mathcal{M}$ auf Eingabe $\underline{w}$ ausführt, bevor $\mathcal{M}$ hält; $T_{\mathcal{M}}(\underline{w}):=\infty$, falls $\mathcal{M}$ auf $\underline{w}$ nicht hält.
- Für $n\in\mathbb{N}$ ist $T_{\mathcal{M}}(n):=\max\{T_{\mathcal{M}}(\underline{w}) \mid \underline{w}\in\Sigma^{\leq n}\}$ die (worst-case) Laufzeit von $\mathcal{M}$ auf Eingaben der Länge $\leq n$; $T_{\mathcal{M}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ heißt Laufzeitfunktion von $\mathcal{M}$
- $T_{\mathcal{M}}(n)\leq O(t(n))$: $\mathcal{M}$ heißt $O(t(n))$-zeitbeschränkt
- $\mathrm{DTIME}(t(n)) := \{ L(\mathcal{M}) :$ $\mathcal{M}$ DTM ist $O(t(n))$—zeitbeschränkt$\}$

Beispiel: TM für Palindrome

PALIN := { $\underline{w} \in \{0,1\}^*$: $\underline{w} = \underline{w}^{\circledR}$ }

- Q := { s , q_{r0} , q_{r1} , q_{z0} , q_{z1} , q_ℓ , q_+ , q_- }
- δ informal:

				↓						
▷	1	1	0	0	1	1	1	0	⊔	⊔

  - s: Erstes Symbol ist   ?   Dann q_+
  - Sonst ‚merke' erstes Symbol i im Zustand q_{ri} überschreibe durch   und gehe nach rechts
  - q_{ri}: gehe nach rechts bis   gefunden; dann eins nach links (zurück) in Zustand q_{zi}
  - q_{zi}: vergleiche Symbol mit i: ungleich $\Rightarrow q_-$ überschreibe mit , Zustand q_ℓ und 1 nach links
  - q_ℓ: nach links bis   gefunden, dann rechts, s

Programmiermethoden

- Merke ein Zeichen im Zustand:
  - Wähle $Q' := Q \cup (\Gamma \times Q)$;
  - analog: merke k Zeichen, $k \in \mathbb{N}$ fest (!)
- zwei/drei Spuren:
  - Wähle $\Gamma' := \Gamma \cup (\Gamma \times \Gamma \times X)$
  - analog: k Spuren
- Unterprogramm

1	0	1	0	0	1	…
1	1	0	0	1	1	…
a	x	r	s	b	y	…

TMen sind nicht bequem zu programmieren.
Sie können aber alles, was ein Digitalcomputer kann
– und sogar recht effizient [Schönhage et.al. 1994]

Linear Speed-Up

Warum *O*-Kalkül?

- **Satz:** Sei $\mathcal{M}$ eine $t(n)$-zeitbeschränkte DTM.
- Dann gibt es eine $\big(t(n)/2+O(n)\big)$-zeitbeschränkte DTM, die M „simuliert".

„Beschleunigung um jeden konstanten Faktor..."

- Beweisidee: Fasse c benachbarte Bandzellen zu einer Zelle zusammen: $\Gamma\to\Gamma^c$; dann:
- führe jeweils c Schritte in einem Schritt aus

Ressource: Platz

Sei $\mathcal{M}=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta)$ eine DTM. Die Länge $|K|$ einer Konfiguration $K = \underline{\alpha}\ q\ \underline{\beta}$ ist $|\underline{\alpha}|+|\underline{\beta}|$

- Für $\underline{w}\in\Sigma^*$ bezeichne $S_{\mathcal{M}}(\underline{w})$ die Anzahl Zellen, die $\mathcal{M}$ auf Eingabe $\underline{w}$ benutzt: $S_{\mathcal{M}}(\underline{w}):=\max |K_i|$, wobei $K_0,K_1,\ldots$ die Folge der Konfigurationen bezeichnet, die $\mathcal{M}$ auf $\underline{w}$ durchläuft; möglicherweise $S_{\mathcal{M}}(\underline{w})=\infty$.
- Für $n\in\mathbb{N}$ ist $S_{\mathcal{M}}(n):=\max\{S_{\mathcal{M}}(\underline{w}) \mid \underline{w}\in\Sigma^{\leq n}\}$ der (worst-case) Platzbedarf von $\mathcal{M}$ auf Eingaben der Länge $\leq n$; $S_{\mathcal{M}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ Platzbedarfsfunktion.
- $S_{\mathcal{M}}(n)\leq O(s(n))$: $\mathcal{M}$ ist $O(s(n))$-platzbeschränkt
- DSPACE$(s(n))$:= { $L=L(\mathcal{M})$ für eine $O(s(n))$—platzbeschränkte DTM $\mathcal{M}$}

Time versus Space

- Fokus oft auf Laufzeiteffizienz; aber:
- *„Zeit ist unbeschränkt, Speicher nicht"*

- $|\underline{w}| \leq S_{\mathcal{M}}(\underline{w}) \leq \max\{T_{\mathcal{M}}(\underline{w}), |\underline{w}|\}$
- Übungsauf.5b: Jede DTM $\mathcal{M}$ kann eine DTM $\mathcal{N}$ simulieren s.d. $T_{\mathcal{N}}(\underline{w}) \leq 2^{O(S_{\mathcal{M}}(\underline{w}))}$
- Theorem [Hopcroft,Paul,Valiant'73]: $\mathcal{N}$ kann $\mathcal{M}$ simulieren mit $S_{\mathcal{N}}(n) \leq O(T_{\mathcal{M}}(n)/\log T_{\mathcal{M}}(n))$ (nächstes Semester…)