Martin Ziegler

Ausgabe am 9.2.2011
Abzugeben am 16.2.2011 11h40

# Komplexitätstheorie

## WS 2010/2011, Aufgabenzettel #13

**AUFGABE 33:**
Für $k \in \mathbb{N}$ besteht die Sprachklasse $\Sigma'_k$ per Definition aus allen Problemen der Form

$$\big\{\vec{x} \in \{0,1\}^n : n \in \mathbb{N},\ \exists \vec{y}_1 \in \{0,1\}^{p(n)}\ \forall \vec{y}_2 \in \{0,1\}^{p(n)}\ \exists \vec{y}_3 \in \{0,1\}^{p(n)} \cdots Q_k \vec{y}_k \in \{0,1\}^{p(n)} : \langle \vec{x}, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k \rangle \in R\big\}$$

mit $R \in \mathcal{P}$ und $p \in \mathbb{N}[N]$. Hierbei bezeichne $Q_k =' \forall'$ falls $k$ gerade, $Q_k =' \exists'$ falls ungerade.

a) Zeigen Sie: $\Sigma'_1 = \mathcal{NP}$ und $\Sigma'_k \subseteq \mathcal{NP}^{\mathcal{NP}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\mathcal{NP}}}}}}$ (Turm der Höhe $k$) sowie $\Sigma'_k \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

b) Für $A, B \in \Sigma'_k$ gilt $A \cap B \in \Sigma'_k$.

c) Für $L \in \Sigma'_k$ und $q \in \mathbb{N}[N]$ gilt $\big\{\vec{x} : \exists \vec{y} \in \{0,1\}^{q(|\vec{x}|)} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in L\big\} \in \Sigma'_k$ .

d) Was ist mit $\big\{\vec{x} : \forall \vec{y} \in \{0,1\}^{q(|\vec{x}|)} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in L\big\}$ ?

e) Nehmen Sie an, jemand zeigte $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP} = \mathrm{co}\mathcal{NP}$:
Wie sähe die Polynomielle Hierarchie in diesem Fall aus? Zeichnen und begründen Sie!
Was ist im Fall $\Delta'_2 \neq \Sigma'_2 = \Pi'_2$?

**AUFGABE 34:**
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $R \subseteq \{0,1\}^n$. "$\oplus : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$" bezeichne das ausschließende Oder, d.h. binäre Addition modulo 2. Für $\vec{x}, \vec{u} \in \{0,1\}^n$ schreibe $\vec{x} \oplus \vec{u} := (x_1 \oplus u_1, \ldots, x_n \oplus u_n)$ und $X \oplus \vec{u} := \{\vec{x} \oplus \vec{u} : \vec{x} \in X\}$. Mit $\Pr_{\vec{u}}[A]$ ist die Wahrscheinlichkeit gemeint, dass Aussage $A$ zutrifft, wenn $\vec{u} \in \{0,1\}^n$ zufällig gleichverteilt komponentenweise unabhängig geraten wird.

a) Sei $\vec{y} \in \{0,1\}^n$. Zeigen Sie: $\vec{y} \in R \oplus \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \oplus \vec{y} \in R \Leftrightarrow \vec{u} \in R \oplus \vec{y}$. Schließen Sie: $\Pr_{\vec{u}}[\vec{y} \in R \oplus \vec{u}] = \Pr_{\vec{u}}[\vec{u} \in R]$ und $\Pr_{\vec{u},\vec{v}}[\vec{y} \in (R \oplus \vec{u}) \cap (R \oplus \vec{v})] = \Pr_{\vec{u}}[\vec{y} \in R \oplus \vec{u}] \cdot \Pr_{\vec{u}}[\vec{y} \in R \oplus \vec{v}]$.

b) Sei $1 \leq n \leq p < 2^n$ und $R \subseteq \{0,1\}^p$ mit $\mathrm{Card}(R) \leq 2^{-n} \cdot 2^p$.
Zeigen Sie: Dann gibt es keine $\vec{t}_1, \ldots \vec{t}_p \in \{0,1\}^p$ mit $\{0,1\}^p = \bigcup_{i=1}^p (R \oplus \vec{t}_1)$.