Martin Ziegler

Ausgabe am 22.12.2010
Abzugeben am 12.1.2011 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #9

AUFGABE 24:
Unsere Schaltkreise bestehen aus binären `UND`- und `ODER`- sowie aus `NICHT`-Gattern.

a) Zeigen Sie: Tatsächlich genügen `NUND`-Gatter, um daraus durch Kombination alle Booleschen Funktionen zu realisieren. Dies beeinflußt Größe und Tiefe höchstens um einen konstanten Faktor.

b) Zeigen Sie weiter: Mit `UND` und `ODER` alleine lassen sich nur *monotone* Funktionen realisieren, bei denen also gilt:

$$\forall 1 \leq j \leq n \quad \forall x_1, \ldots, x_n : \quad f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n) \ .$$

c) Erlauben wir nun temporär `UND` und `ODER`-Gatter mit beliebig vielen Eingängen; als ihre Größe soll die Anzahl Eingänge gelten.
Zeigen Sie: In jedem Schaltkreis polynomieller Größe lassen sich solche Gatter durch ihre binären Varianten ersetzen, wobei die Tiefe höchstens um einen logarithmischen Faktor zunimmt und die Größe höchstens um einen konstanten.

d) Erinnern Sie sich an Aufgabe 9g) und zeigen Sie: Jede Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ wird entschieden durch eine Schaltkreisfamilie der Tiefe $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$. Ist diese uniform? Begründen Sie!

e) Die Boolesche Funktion $\mathrm{Mux}_n : (x_1, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_{2^n-1}) \mapsto y_{(x_1,\ldots,x_n)_2}$ heißt Multiplexer. Skizzieren Sie einen Schaltkreis C_n für Mux_n mit Tiefe $\mathcal{O}(n)$. Ist $(C_n)_n$ uniform?

AUFGABE 25:

a) Weisen Sie die Assoziativität der Operation $(g,p) \otimes (g',p') := \big(g' \vee (p' \wedge g), p' \wedge p\big)$ nach.

b) Erinnern Sie sich an die Definition einer nichtdeterministisch berechneten Funktion aus dem Satz von Immerman und Szelepcsényi. Sei $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ eine nichtdeterministisch in logarithmischem Platz berechenbare Funktion, bei der $|f(\vec{x})|$ nur von $|\vec{x}|$ abhängt. Zeigen Sie: f läßt sich durch Schaltkreise polynomieller Größe der Tiefe $\mathcal{O}(\log^2 n)$ berechnen.
Welche Schwierigkeiten treten auf, wenn $|f(\vec{x})|$ nicht nur von $|\vec{x}|$ abhängt?

c) Die Komposition von Funktionen, welche durch polynomiell-große Schaltkreise der Tiefe $\mathcal{O}(\log^k n)$ berechnet werden, läßt sich auch wieder durch solche Schaltkreise berechnen.

d) Finden Sie Fehler in der Arbeit `http://de.arxiv.org/abs/0907.3965`