Martin Ziegler

Ausgabe am 15.12.2010
Abzugeben am 22.12.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #8

AUFGABE 21:
Für unser herkömmliches Turingmaschinen-Modell gilt für Platzbedarf $s(n) \geq n$ die bekannte Beziehung $\mathsf{DSPACE}\big(s(n)\big) \subseteq \mathsf{DTIME}\big(2^{O(s(n))}\big)$. Für das Kostenmaß einer DTM mit read-only Eingabeband ist diese Relation jedoch a priori nicht anwendbar.

a) Finden und beweisen sie eine ähnliche Beziehung, die auch für $s(n) \ll n$ richtig ist.

b) Schließen Sie: $\mathcal{NL} \subseteq \mathcal{P}$.

Bislang betrachteten wir polynomielle Reduzierbarkeit "$\preccurlyeq_{\mathrm{p}}$". Definiere nun "$A \preccurlyeq_{\mathrm{L}} B$" durch: es gibt eine in logarithmischem Platz berechenbare Funktion f mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Hierbei zählt das Arbeitsband, jedoch weder Ein- *noch Ausgabe*band zum Platzverbrauch.

c) Zeigen Sie: $A \preccurlyeq_{\mathrm{L}} B \quad \Rightarrow \quad A \preccurlyeq_{\mathrm{p}} B$.

d) Zeigen Sie: $A \preccurlyeq_{\mathrm{L}} B \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{L}, \qquad A \preccurlyeq_{\mathrm{L}} B \in \mathcal{NL} \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{NL}$.

e) Zeigen Sie: $A \preccurlyeq_{\mathrm{L}} B \quad \wedge \quad B \preccurlyeq_{\mathrm{L}} C \quad \Rightarrow \quad A \preccurlyeq_{\mathrm{L}} C$.

AUFGABE 22:

a) Zeigen Sie: CYCLIC $:= \{\langle G\rangle : \text{gerichteter Graph } G \text{ enthält einen Kreis}\} \in \mathcal{NL}$.

b) Zeigen Sie: 2SAT $\in \mathrm{co}\mathcal{NL}$. Tipp: Analysieren Sie Übungsaufgabe 9c+d).

c) Zeigen Sie: 2SAT ist co$\mathcal{NL}$-vollständig.

Ein Graph $G = (V,E)$ heißt *bipartit*, falls sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 aufteilen lassen, so dass zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten existieren, d.h. $(u,v) \in E$ impliziert entweder $u \in V_1 \wedge v \in V_2$ oder $v \in V_1 \wedge u \in V_2$. Zeigen Sie:

d) Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

e) Zeigen Sie: BIPARTITE $:= \{\langle G\rangle : \text{Graph } G \text{ ist bipartit}\} \in \mathrm{co}\mathcal{NL}$.

f) Zeigen Sie: BIPARTITE ist co$\mathcal{NL}$-vollständig.

AUFGABE 23:

$$\text{DIRPATH} := \big\{\langle G,s,t\rangle : \text{gerichteter Graph } G=(V,E) \text{ enthält einen Pfad von } s\in V \text{ nach } t \in V\big\}$$

bezeichne das *gerichtete* Pfadproblem und UNDIRPATH entsprechend das *ungerichtete*. OMER REINGOLD konnte 2004 zeigen (und hat dafür den 2006 ACM Grace Murray Hopper Preis erhalten), daß letzteres sich *deterministisch* in logarithmischem Platz entscheiden läßt: UNDIRPATH $\in \mathcal{L}$.

a) Beweisen Sie, dass für jedes $L \in \mathcal{P}$ gilt: $L \preccurlyeq_{\mathrm{p}}$ UNDIRPATH.

b) Warum ist damit nicht die wichtige offene Frage "$\mathcal{L}$ *versus* $\mathcal{P}$" beantwortet?
Geben Sie ein $\mathcal{L}$-vollständiges Problem an.