Martin Ziegler

Ausgabe am 8.12.2010
Abzugeben am 15.12.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #7

AUFGABE 18:
Erinnern Sie sich an die *Platzkonstruierbarkeit* einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus dem Satz von Savitch.

a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f(n) \geq n$, die sich als arithmetischer Ausdruck über den Operatoren $\{+, \times, \mathrm{pow}\}$ und den Konstanten aus $\mathbb{N}$ darstellen läßt, platzkonstruierbar ist. (Hierbei bezeichnet $\mathrm{pow} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \mapsto 2^n$ die Potenzabbildung zur Basis 2.)

b) Wo und wie genau ging im Beweis die Voraussetzung ein, die Platzschranke $s(n)$ sei platzkonstruierbar?

c) Welche Laufzeit hat die im Beweis konstruierte deterministische Simulation?

d) Die Definition von "platzkonstruierbar" betrachtet die Funktion $1^n \mapsto \mathrm{bin}\big(s(n)\big)$.
Welchen Unterschied macht es, wenn man $1^n \mapsto 1^{s(n)}$ nimmt?

e) Zeigen Sie: Der Beweis funktioniert auch dann noch, wenn sich die Funktion $1^n \mapsto \mathrm{bin}\big(s(n)\big)$ innerhalb von Platz $\mathcal{O}\big(s(n)^{\mathbf{2}}\big)$ berechnen läßt.

AUFGABE 19:
Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platzkonstruierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt

a) $\mathsf{NSPACE}\big(s(n)\big) \subseteq \mathrm{co}\mathsf{NSPACE}\big(s(n)^2\big)$

b) $\mathrm{co}\mathsf{NSPACE}\big(s(n)\big) \subseteq \mathsf{NSPACE}\big(s(n)^2\big)$

c) Schließen Sie daraus: $\mathsf{NPSPACE} = \mathrm{co}\mathsf{NPSPACE}$.

d) Warum läßt sich nicht analog zeigen: $\mathcal{NP} = \mathrm{co}\mathcal{NP}$?

AUFGABE 20:
Betrachten Sie die Sprache

$$\textsc{Path} = \left\{ \langle G, s, t \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G = (V,E) \text{ ist ein gerichteter Graph mit } s,t \in V \text{ und es} \\ \text{existiert ein einfacher, gerichteter Pfad von } s \text{ nach } t \text{ in } G. \end{array} \right\}.$$

Geben Sie einen platzeffizienten Algorithmus an, welcher $\textsc{Path}$ entscheidet und dabei neben dem Platz für die Eingabe höchstens $\mathcal{O}\big(\log(n)^2\big)$ weitere Bandzellen verwendet. Überlegen Sie sich auch, welche Laufzeit ihr Algorithmus hat.