Martin Ziegler

Ausgabe am 1.12.2010
Abzugeben am 8.12.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #6

AUFGABE 15:
Beweisen Sie:

a) Wenn eine Sprache PSPACE-schwer ist, so ist sie auch $\mathcal{NP}$-schwer.

b) Wenn irgendeine PSPACE-vollständige Sprache in $\mathcal{NP}$liegt, so folgt $\mathcal{NP} = \mathsf{PSPACE}$.

c) Falls jede $\mathcal{NP}$-schwere Sprache auch PSPACE-schwer ist, so folgt $\mathcal{NP} = \mathsf{PSPACE}$.

Bezeichne co$\mathcal{NP}$ die Klasse aller Sprachen, deren Komplement in $\mathcal{NP}$liegt; vgl. Aufgabe 11e).

d) Definieren Sie die formal "co$\mathcal{NP}$–schwer" und "co$\mathcal{NP}$–vollständig". Zeigen Sie:

e) Die Klassen "$\mathcal{NP}$–vollständig" und "co$\mathcal{NP}$–vollständig" sind entweder gleich oder disjunkt.

f) Zeigen Sie: Zu beliebigen Sprachen A, B mit $\emptyset \subsetneq B \subsetneq \Sigma^*$ und $A \in \mathsf{PSPACE}$
gibt es $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechenbar in polynomiellem Platz mit: $\vec{x} \in A \Leftrightarrow f(\vec{x}) \in B$.

AUFGABE 16:
Erinnern Sie sich an das Zwei-Spieler Problem auf gerichteten Graphen aus der Vorlesung und die damit verbundene Frage nach der Existenz einer Gewinnstrategie.

a) Zeigen Sie: Entweder hat der (beginnende) Spieler 1 eine Gewinnstrategie oder Spieler 2.
Welche Eigenschaften des Spiels haben Sie ausgenützt?

b) Geben Sie einen rekursiven Algorithmus an, der die Wahrheit einer quantifizierten Booleschen Formel in polynomiellem Platz entscheidet. Begründen Sie!

c) Zeigen Sie: Das Problem Graph-Spiel liegt in PSPACE.

AUFGABE 17:
#SAT sei das Funktionsproblem, zu berechnen, wie viele erfüllende Belegungen eine gegebene KNF-Formel φ besitzt. Für eine gegebene nichtdeterministische Turinmaschine M und $\bar{x} \in \Sigma^*$ bezeichne $\#M(\bar{x})$ die Anzahl akzeptierender Rechnungen von M auf Eingabe $\bar{x}$. Weiterhin sei

$$\#\mathcal{P} := \left\{ f_M \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ polynomialzeitbeschränkte NTM,} \\ f_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0 \text{ Abbildung mit } \bar{x} \mapsto \#M(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

a) Zeigen Sie: Jedes $f \in \#\mathcal{P}$ läßt sich in polynomiellem Platz berechnen.

b) Definieren Sie "#$\mathcal{P}$–schwer" und "#$\mathcal{P}$–vollständig".
Welcher Reduktionsbegriff ist für solche *Zähl*probleme angemessen?

c) Beweisen Sie: #SAT ist #$\mathcal{P}$–vollständig. Tipp: Cook-Levin Beweis.