Martin Ziegler

Ausgabe am 24.11.2010
Abzugeben am 1.12.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #5

Beim *Rucksackproblem* geht es darum, möglichst viel an 'Wert' in einen Rucksack zu packen bei minimalem 'Gewicht'. Als Entscheidungsproblem formalisiert ist es die Sprache

$$\begin{aligned}\textsc{Knapsack} \quad = \quad & \big\{\langle g_1,\ldots,g_m,g,w_1,\ldots,w_m,w\rangle : m,g_i,g,w_i,w \in \mathbb{N}, \\ & \exists \alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \{0,1\} : \textstyle\sum_i \alpha_i w_i \geq w \;\wedge\; \sum_i \alpha_i g_i \leq g\big\}\end{aligned}$$

Als Maximierungsproblem ist es die Funktion

$$\textsc{MaxKnapsack} \;:\; \langle g_1,\ldots,g_m,g,w_1,\ldots,w_m\rangle \;\mapsto\; \max\big\{\textstyle\sum_i \alpha_i w_i : \alpha_i \in \{0,1\}, \sum_i \alpha_i g_i \leq g\big\}$$

Ganzzahlige lineare Optimierung (integer linear programming) ist dieses Entscheidungsproblem:

$$\text{ILP} \;:=\; \big\{\langle A,b\rangle : m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{Z}^{m\times m}, b \in \mathbb{Z}^m : \exists x \in \mathbb{Z}^m : A\cdot x \leq b\big\} \;.$$

AUFGABE 13:

a) Beweisen Sie: $\textsc{Knapsack}$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

b) Beweisen Sie: $\textsc{MaxKnapsack}$ ist genau dann in polynomieller Zeit berechenbar, wenn $\textsc{Knapsack}$ in polynomieller Zeit entscheidbar ist. Tipp: Erinnern Sie sich an Aufgabe 7.

c) Beweisen Sie: ILP ist $\mathcal{NP}$-schwer.

d) Reduzieren Sie das Hamiltonkreisproblem HC auf das Handlungsreisendenproblem TSP.

e) Sei $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,\ldots\}$ die Menge der Primzahlen. Zeigen Sie: $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P} \in \mathcal{NP}$.

f) Wir betrachten die ganzzahlige Lösbarkeit einer multivariaten polynomiellen Gleichung:

$$\textsc{Diophant} \;:=\; \big\{\langle p\rangle : m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}[X_1,\ldots,X_m], \exists x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{N} : p(x_1,\ldots,x_m) = 0\big\} \;.$$

Beweisen Sie explizit: $\text{ILP} \preccurlyeq_{\mathrm{p}} \textsc{Diophant}$.

g) Sind $\textsc{Diophant}$ und ILP auch $\mathcal{NP}$-vollständig? Worin liegt die Schwierigkeit?

Sie dürfen sich bei den Reduktionen in a) und c) auf die in der Vorlesung als $\mathcal{NP}$-vollständig nachgewiesenen Probleme SAT, 3SAT und $\textsc{SubsetSum}$ beziehen.

AUFGABE 14:
Betrachten wir das folgende Optimierungsproblem: Gegeben $\ell \in \mathbb{N}$ sowie m Pakete mit Gewichten $g_1,\ldots,g_m \in \mathbb{N}$; verteile sie so auf ℓ Tüten, dass deren Maximalgewicht minimal ist.

a) Formulieren Sie das zugehörige Entscheidungsproblem und beweisen Sie, dass es $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Tipp: Betrachten Sie $\ell = 2$ und $\textsc{SubsetSum}$.

b) Beweisen Sie, dass der folgende Greedy-Algorithmus eine Güte-2 Approximation liefert:

Iterativ für jedes $i = 1,\ldots,m$ stecke Paket #i in die noch leichteste Tüte.

c) Zeigen Sie, dass der Algorithmus keine bessere Güte hat. Konstruieren Sie hierzu für $\varepsilon > 0$ Eingabeinstanzen, auf denen seine Lösung um Faktor $2-\varepsilon$ größer als das Optimum ist.