Martin Ziegler

Ausgabe am 17.11.2010
Abzugeben am 24.11.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #4

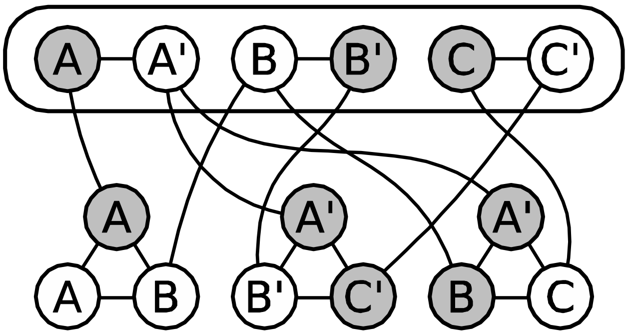
AUFGABE 10:
Erinnern Sie sich an die Probleme $\mathsf{3SAT}$ und VC aus der Vorlesung.

a) Zeigen Sie: $\mathsf{VC} \preccurlyeq_p \mathsf{SAT}$ direkt, d.h. ohne den Satz von Cook-Levin.

b) Begründen Sie: Jede Knotenüberdeckung einer 2-Clique benötigt wenigstens einen Knoten; jede Knotenüberdeckung einer 3-Clique benötigt wenigstens zwei Knoten.

c) Zeigen Sie: $\mathsf{3SAT} \preccurlyeq_p \mathsf{VC}$.

Tipp: Die folgende Zeichnung illustriert die Reduktion der $\mathsf{3SAT}$-Instanz $\Phi = (A \vee A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$ auf eine VC-Instanz (G,k) mit $k := \#\text{Variablen} + 2 \cdot \#\text{Klauseln}$.



$A \vee A \vee B$ $\quad \neg A \vee \neg B \vee \neg C$ $\quad \neg A \vee B \vee C$

AUFGABE 11:
Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Der *Kleene-Star* von A ist die Sprache

$$A^* \; := \; \{\bar{a}_1\bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n | n \in \mathbb{N}_0, \bar{a}_i \in A\} \quad ,$$

die also aus Verkettungen endlich vieler Wörter aus A besteht.

a) Vergleichen Sie die zwei Bedeutungen von “Σ^*”.

b) Zeigen Sie: $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter

   i) Vereinigung, d.h. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{P}$
   ii) Durchschnitt, d.h. $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
   iii) und Komplement, d.h. $A \in \mathcal{P} \Rightarrow \Sigma^* \setminus A \in \mathcal{P}$.

   Man kann zeigen: $\mathcal{P}$ ist zudem abgeschlossen unter Kleene-Star.

c) Zeigen Sie: Auch PSPACE ist abgeschlossen unter
   i) Vereinigung, ii) Durchschnitt, iii) Komplement sowie iv) unter Kleene-Star.

d) Zeigen Sie: $\mathcal{NP}$ ist abgeschlossen unter Vereinigung, Durchschnitt und Kleene-Star.

e) Zeigen Sie: Die Komplemente von Sprachen in $\mathcal{NP}$ sind genau die von der Form

$$\big\{\bar{x} \in \Sigma^* : \forall \bar{y} \in \Sigma^{\leq p(|\bar{x}|)} : \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in K \big\}, \qquad K \in \mathcal{P} \quad .$$

AUFGABE 12:
Eine *nichtdeterministische* Turingmaschine $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$ besitzt eine Übergangs*relation*

$$\delta \quad \subseteq \quad \big((Q \setminus \{q_-, q_+\}) \times \Gamma\big) \times \big(Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{N}, \mathsf{R}\}\big) \ .$$

Eine *Rechnung* einer solchen NTM ist eine Folge von Konfigurationen mit: Ist $\mathcal{N}$ zuerst im Zustand q und liest a, so erfüllt der Folgezustand p, das geschriebene Zeichen b und die Kopfbewegung D: $(q, a, p, b, D) \in \delta$.
$\mathcal{N}$ *akzeptiert* eine Eingabe $\vec{w}$, falls es eine Rechnung von $\mathcal{N}$ von der Startkonfiguration $(s, \vec{w})$ zu einer akzeptierenden Endkonfiguration gibt.
$\mathcal{N}$ *akzeptiert* die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, wenn $\mathcal{M}$ genau die Eingaben $\vec{w} \in L$ akzeptiert. $\mathcal{M}$ *entscheidet* L, wenn zusätzlich gilt: jede Rechnung von $\mathcal{M}$ terminiert.
Die Laufzeit $T_{\mathcal{N}}(\vec{w})$ ist das Maximum der Laufzeit aller Rechnungen von $\mathcal{N}$ auf Eingabe $\vec{w}$; analog der Platzbedarf $S_{\mathcal{N}}(\vec{w})$.

a) Begründen Sie, daß eine deterministische Turingmaschine ein Spezialfall einer nichtdeterministischen Turingmaschine ist.
Beschreiben Sie eine NTM, die das Boolesche Erfüllbarkeitsproblem SAT in polynomieller Zeit entscheidet.

b) Skizzieren Sie die Menge aller möglichen Rechnungen einer NTM auf der festen Eingabe $\vec{w}$ als Baum.
Welchen Grad (d.h. wieviele direkte Nachbarn) haben die Knoten dieses Baumes höchstens?
Begründen Sie, warum es keine Entschränkung darstellt, nur NTMs mit maximal zwei möglichen Nachfolgekonfigurationen zu betrachten, d.h. mit $\operatorname{Card}\{(p, b, D) : (q, a, p, b, D) \in \delta\} \leq 2$ für alle $q \in Q$ und $a \in \Gamma$.

c) Beweisen Sie: Jede (Mehrband-) NTM $\mathcal{N}$ kann durch eine (Mehrband-) DTM $\mathcal{M}$ simuliert werden so daß gilt:

$$T_{\mathcal{M}}(n) \ \leq \ 2^{\mathcal{O}(T_{\mathcal{N}}(n))}, \qquad S_{\mathcal{M}}(n) \ \leq \ \mathcal{O}\big(T_{\mathcal{N}}(n) \cdot S_{\mathcal{N}}(n)\big) \ .$$

d) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ (deterministisch) in Zeit $\mathcal{O}\big(p(n)\big)$ entscheidbar. Betrachten wir die Sprache

$$L'_p \ := \ \big\{\vec{x} \in \Sigma^* : \exists \vec{y} \in \Sigma^{\leq p(|\vec{x}|)} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in L\big\}$$

Beschreiben Sie eine NTM, die L'_p in polynomieller Zeit entscheidet.

e) Umgekehrt sei $K \subseteq \Sigma^*$ durch eine NTM in polynomieller Zeit entscheidbar. Beweisen Sie: Dann gibt es ein (durch eine DTM) in polynomieller Zeit entscheidbares L und $p(N) \in \mathbb{N}[N]$ mit $K = L'_p$.