Martin Ziegler

Ausgabe am 10.11.2010
Abzugeben am 17.11.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #3

AUFGABE 9:
Sei G ein (gerichteter oder ungerichteter) Graph. Das Erreichbarkeitsproblem ist die Frage, ob es für gegebenes G und Knotenpaar (u,v) einen Weg von u nach v gibt.

a) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der das Erreichbarkeitsproblem in polynomieller Zeit löst.

Betrachten Sie nun das Problem 2SAT: Ob eine gegebene Boolesche Formel in konjunktiver Normalform mit zwei Literalen pro Klausel eine erfüllende Belegung besitzt.

b) Begründen Sie: Die Frage, ob eine Eingabe Kodierung einer Formel in konjunktiver Normalform ist, kann eine Turingmaschine in polynomieller Zeit entscheiden.

c) Der *Implikationsgraph* G_F zu einer Formel $F(x_1,\dots,x_n)$ in 2KNF besteht aus den $2n$ Knoten* $x_1,\dots,x_n,\neg x_1,\dots,\neg x_n$ sowie gerichteten Kanten $(\neg u,v)$ und $(\neg v,u)$ zwischen Literalen u,v für jede Klausel $(u\vee v)$ von F.
Beweisen Sie: Wenn F erfüllbar ist und x eine Variable, so gibt es in G_F keinen Weg von x zu $\neg x$ oder keinen Weg von $\neg x$ zu x.

d) Gelte umgekehrt für jede Variable x von F: Es gibt in G_F keinen Weg von x zu $\neg x$ oder keinen Weg von $\neg x$ zu x. Schließen Sie: Dann ist F erfüllbar.

e) Schließen Sie: 2SAT ist in polynomieller Zeit entscheidbar.

f) Eine Formel F in *disjunktiver* Normalform hat die Form $F = C_1\vee C_2\vee\cdots\vee C_m$, wobei jede Klausel C_i *Kon*junktion von Literalen ist. Zeigen Sie: Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln in disjunktiver Normalform ist in polynomieller Zeit entscheidbar.

g) Beweisen Sie: i) Es gibt genau 2^{2^n} verschiedene Boolesche Funktionen in n Variablen; und jede läßt sich als Boolesche Formel in ii) disjunktiver und iii) in konjunktiver Normalform darstellen. Tipp: Verifizieren Sie $$F(x_1,\dots,x_n) \quad = \quad \bigvee_{\vec{y}:f(\vec{y})=1}\ \bigwedge_{i=1}^{n}\begin{cases} x_i & : y_i=1\\ \neg x_i & : y_i=0\end{cases}$$

h) Geben Sie n-variate Boolesche Funktionen F_n an, die sich als Formeln in disjunktiver Normalform von polynomieller Größe schreiben lassen, nicht jedoch als Formeln polynomieller Größe in konjunktiver Normalform (ohne Beweis).

j) Betrachten Sie das Äquivalenzproblem: Gegeben zwei n-variate Boolesche Formeln F und G, gilt dann $F(\vec{x}) = G(\vec{x})$ für alle $\vec{x}\in\{0,1\}^n$?
Zeigen Sie: Dieses Problem ist gleich schwer wie das *Un*erfüllbarkeitsproblem $\Sigma^*\setminus$ SAT.

k) Beweisen oder widerlegen Sie: i) $A\subseteq B \;\Rightarrow\; A\preccurlyeq_{\mathrm{p}} B$, ii) $A\preccurlyeq_{\mathrm{p}} B \;\Rightarrow\; A\subseteq B$.

---

*D.h. wir identifizieren Knoten mit Literalen.

AUFGABE 10:
Erinnern Sie sich an die Probleme 3SAT und VC aus der Vorlesung:

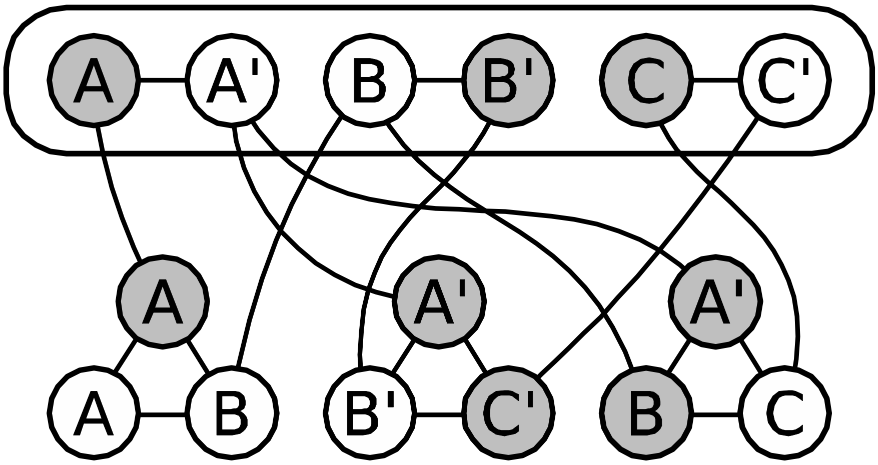
$$\mathsf{VC} = \left\{ \langle G,k\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G=(V,E) \text{ ist ein ungerichteter Graph und es existiert} \\ \text{eine Teilmenge } U \subseteq V \text{ mit } |U|=k\text{, so dass für jede} \\ \text{Kante } (u,v)\in E \text{ gilt: } u\in U \text{ oder } v \in U. \end{array} \right\}$$

a) Zeigen Sie: VC $\preccurlyeq_\mathrm{p}$ SAT.

b) Begründen Sie: Jede Knotenüberdeckung einer 2-Clique benötigt wenigstens einen Knoten; jede Knotenüberdeckung einer 3-Clique benötigt wenigstens zwei Knoten.

c) Zeigen Sie: 3SAT $\preccurlyeq_\mathrm{p}$ VC.

Tipp: Die folgende Zeichnung illustriert die Reduktion der 3SAT-Instanz $\Phi = (A \vee A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$ auf eine VC-Instanz (G,k) mit $k :=$ #Variablen $+ 2 \cdot$ #Klauseln.



$A \vee A \vee B$ $\qquad$ $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ $\qquad$ $\neg A \vee B \vee C$