Martin Ziegler

Ausgabe am 3.11.2010
Abzugeben am 10.11.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #2

AUFGABE 6:
Die in der Vorlesung behandelten Turingmaschinen besitzen einen Schreib-/Lese-Kopf. Eine *k-Band Turingmaschine* besitzt k separate Köpfe, die unabhängig von einander bewegt werden können.

a) Formalisieren Sie dieses Konzept; genauer: erklären Sie mathematisch den Definitions- und Wertebereich der Zustandsübergangsfunktion δ einer k-Band Turingmaschine.

b) Erinnern Sie sich an Aufgabe 4a). Beschreiben Sie nun eine 2-Band Turingmaschine, die die Sprache `PALIN` in Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ entscheidet.

AUFGABE 7:
Bislang haben wir Entscheidungsprobleme (sog. Sprachen) $L \subseteq \Sigma^*$ betrachtet. Eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*$, wenn $\mathcal{M}$

- bei Eingaben $\vec{x} \in \mathrm{dom}(f)$ $\;f(\vec{x})$ aufs Band schreibt und in den akzept. Endzustand geht;
- bei Eingaben $\vec{x} \notin \mathrm{dom}(f)$ *nicht* in den akzeptierenden Endzustand geht.

Laufzeit und Platzbedarf sind analog übertragen zu verstehen. Zeigen Sie:

a) Wenn f in polynomieller Zeit berechenbar ist, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|f(\vec{x})| \leq \mathcal{O}(|\vec{x}|^k)$ für alle $\vec{x} \in \mathrm{dom}(f)$, wobei $|\vec{x}| = n$ die Länge von $\vec{x} \in \Sigma^n$ bezeichnet.

b) Wenn f in polynomieller Zeit berechenbar ist, so ist die Sprache $\mathrm{Graph}(f) := \big\{\langle \vec{x}, k, f(\vec{x})_k\rangle : \vec{x} \in \mathrm{dom}(f), k \in \mathbb{N}\big\}$ in polynomieller Zeit entscheidbar. Hierbei bezeichnet $(\vec{y})_k$ das k-te Zeichen von $\vec{y} \in \Sigma^*$; $\llcorner\!\lrcorner$ im Fall $k > |\vec{y}|$.

c) Wenn $\mathrm{Graph}(f)$ in polynomieller Zeit entscheidbar ist und $|f(\vec{x})| \leq \mathcal{O}(|\vec{x}|^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, so ist f in polynomieller Zeit berechenbar.

AUFGABE 8:
Wir erinnern an die Algorithmen zur Matrixmultiplikation im sogenannten algebraischen Rechenmodell: Addition, Multiplikation und Subtraktion beliebig(groß)er Zahlen kosten jeweils einen Schritt. Beweisen Sie:

a) Ist die Multiplikation oberer $n \times n$-Dreiecksmatrizen in $\mathcal{O}(n^\omega)$ Schritten möglich, so auch jene von beliebigen $n \times n$-Matrizen.

b) Ist die Invertierung nichtsingulärer oberer Dreiecksmatrizen in $\mathcal{O}(n^\omega)$ Schritten möglich, so auch die Multiplikation beliebiger $n \times n$-Matrizen. Tipp: Was ist die Inverse von $\begin{pmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$?