Martin Ziegler

Ausgabe am 20.10.2010
Abzugeben am 27.10.2010 11h40

Komplexitätstheorie

WS 2010/2011, Aufgabenzettel #0

AUFGABE 1:

a) Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton wachsend mit $s(n) \geq n$. Vergleichen Sie die folgenden drei asymptotischen Funktionsklassen (Landau-Notation): Welche wächst mindestens so stark wie welche; welche echt stärker, welche sind gleich? Begründen Sie!

i) $\mathcal{O}(2^{s(n)})$ ii) $2^{\mathcal{O}(s(n))}$ iii) $\mathcal{O}\big(2^{\mathcal{O}(s(n))}\big)$

b) Wächst $n^{\log(n)}$ polynomiell oder exponentiell? Warum?

c) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck asymptotisch: $n^{\log\log(n)/\log(n)}$.

d) Zeigen Sie: $\max(f,g) = \Theta(f+g)$ und $n! = 2^{\Theta(n \log n)}$. Tipp: Stirling.

e) Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum von $n \mapsto \binom{n}{K}$ und von $n \mapsto \sum_{k=0}^{K} \binom{n}{k}$.
Hier ist K konstant. Was kann passieren, wenn K von n abhängt?

f) Lösen Sie die Rekurrenzgleichung $f(n) = a \cdot f\big(\lceil n/2 \rceil\big) + b$ und bestimmen Sie das asymptotische Wachstum der so definierten Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wie gehen b und $f(1)$ ein?

g) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass weder $f(n) = \mathcal{O}(n)$ noch $f(n) = \Omega(n)$ gilt.

AUFGABE 2:

a) Erinnern Sie sich an die Schulmethode zur schriftlichen Addition mehrstelliger Zahlen. Beschreiben Sie semi-informal einen Algorithmus zur Addition zweier n-stelliger Binärzahlen. Eingabe sind also zwei Folgen $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ und $(b_{n-1}, \ldots, b_0)$ über $\{0,1\}$. Welche Form besitzt die Ausgabe? Welche Laufzeit hat der Algorithmus? Was sind seine Elementaroperationen? Ist die Laufzeit optimal?

b) Erinnern Sie sich an die Schulmethode zur schriftlichen Multiplikation mehrstelliger Zahlen (Polynommultiplikation). Analysieren Sie die Laufzeit dieses Algorithmus zur Multiplikation zweier gegebener n-stelliger Binärzahlen. Welche Form besitzt die Ausgabe?

c) Beschreiben Sie semi-informal einen Algorithmus zur Multiplikation eines gegebenen Polynoms vom Grad n mit dem Monom X^m in Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$. Was sind seine Elementaroperationen? Welche Form haben Ein- und Ausgabe?

d) $(aX+b)\cdot(cX+d) \;=\; rX^2 + (s-r-t)X + t, \quad r := a\cdot c,\ t := b\cdot d,\ s := (a+b)\cdot(c+d)$.
Beschreiben Sie semi-informal einen Algorithmus zur Multiplikation zweier gegebener Polynome vom Grad n in Laufzeit $o(n^2)$. Was sind seine Elementaroperationen?

x) *Erinnern Sie sich an die Schulmethode zur schriftlichen Division mit Rest mehrstelliger Zahlen (Polynomdivision). Beschreiben Sie semi-informal einen Algorithmus zur Division mit Rest zweier n-stelliger Binärzahlen in Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$.*

f) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine gegebene n-stellige Binärzahl daraufhin testet, ob sie eine Primzahl ist. Welche Laufzeit erreichen Sie?
Zum Vergleich: 2003 wurde ein Algorithmus vorgestellt, der dies in Laufzeit $\mathcal{O}(n^{12})$ schafft.

---

*Logarithmen sind stets zur Basis 2 gemeint.