Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung: Lösungsvorschlag

G6. Das primal-duale Newtonsystem

zu a): Die Newtongleichung lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Xy - \mu e \end{pmatrix}. \tag{PD}$$

zu b): Wir betrachten das homogene System

$$F'_\mu(x,u,y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da nach der zweiten Blockzeile $A\Delta x = 0$ ist, ergibt die erste

$$\Delta x^T \Delta y = -\Delta x^T A^T \Delta u = 0.$$

Wegen $(x, y) > 0$ ergibt Multiplikation der letzten Zeile mit $\Delta y^T Y^{-1}$ unter Verwendung von $\Delta x^T \Delta y = 0$

$$0 = \Delta y^T \Delta x + \Delta y^T Y^{-1} X \Delta y = \Delta y^T Y^{-1} X \Delta y,$$

also $\Delta y = 0$. Wieder nach der letzten Zeile ist $\Delta x = -Y^{-1} X \Delta y = 0$. Die erste Zeile ergibt nun $A^T \Delta u = 0$, also $\Delta u = 0$, da A nach Vor. vollen Zeilenrang hat.

zu c): Wir addieren $X^{-1}\cdot$ 3. Zeile zur 1. Zeile:

$$\begin{pmatrix} X^{-1}Y & -A^T & 0 \\ A & 0 & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X^{-1}(Xy - \mu e) \\ 0 \\ -(Xy - \sigma\mu e) \end{pmatrix}.$$

Addition von $-AY^{-1}X\cdot$ 1. Zeile zur 2. Zeile ergibt:

$$\begin{pmatrix} X^{-1}Y & -A^T & 0 \\ 0 & AY^{-1}XA^T & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X^{-1}(Xy - \mu e) \\ AY^{-1}(Xy - \mu e) \\ -(Xy - \sigma\mu e) \end{pmatrix}.$$

Die mittlere Zeile liefert also

$$ADA^T \Delta u = r, \quad D = Y^{-1}X, \quad r = AY^{-1}(Xy - \mu e).$$

Die erste Zeile in (PD) ergibt dann

$$\Delta y = -A^T \Delta u$$

und die letzte Zeile

$$\Delta x = -Y^{-1}(X\Delta y + Xy - \mu e).$$

G7. Konvergenz des zentralen Pfads gegen strikt komplementäre Lösungen

Sei also $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \Omega$ mit $\bar{x} + \bar{y} > 0$ und setze $B = \{i \,:\, \bar{x}_i > 0\}$, $N = \{i \,:\, \bar{y}_i > 0\}$.

zu a): Es sei $(x, u, y) = (x(\mu), u(\mu), y(\mu))$. Wir haben

$$c = A^T u + y, \quad c = A^T \bar{u} + \bar{y},$$

also

$$y - \bar{y} = A^T(\bar{u} - u).$$

Zudem gilt $A(x - \bar{x}) = b - b = 0$ und zusammen

$$(x - \bar{x})^T(y - \bar{y}) = (x - \bar{x})^T A^T(\bar{u} - u) = 0^T(\bar{u} - u) = 0.$$

Nun ist $\bar{x}^T\bar{y} = 0$ wegen der Komplementaritätsbedingung. Weiter gilt $x_i y_i = \mu$, also $x^T y = n\mu$. Daher ergibt Ausmultiplizieren

$$0 = x^T y - \bar{x}^T y - \bar{y}^T x + \bar{x}^T \bar{y} = n\mu - \bar{x}^T y - \bar{y}^T x + 0$$

und somit $x^T\bar{y} + y^T\bar{x} = n\mu$.

zu c): Wegen $\bar{x}_i = 0$, $i \in N$, $\bar{y}_i = 0$, $i \in B$, folgt

$$n\mu = \sum_{i \in B} \bar{x}_i y_i + \sum_{i \in N} \bar{y}_i x_i \geq \begin{cases} \bar{x}_i y_i & i \in B, \\ \bar{y}_i x_i & i \in N. \end{cases}$$

Wir erhalten

$$0 < y_i \leq \frac{n}{\bar{x}_i}\mu, \quad i \in B, \quad 0 < x_i \leq \frac{n}{\bar{y}_i}\mu, \quad i \in N.$$

Wegen $x_i y_i = \mu$ folgt hieraus

$$x_i = \frac{\mu}{y_i} \geq \frac{\mu}{\mu n/\bar{x}_i} = \frac{\bar{x}_i}{n}, \quad i \in B,$$

sowie

$$y_i = \frac{\mu}{y_i} \geq \frac{\mu}{\mu n/\bar{y}_i} = \frac{\bar{y}_i}{n}, \quad i \in N.$$

zu d): Sei $\mu_k \searrow 0$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach Lemma 2.3.3 gilt

$$c^T x(\mu_k) - f^* \leq n\mu_k \leq n\mu_0 \tag{1}$$

und zudem

$$f^* - b^T u(\mu_k) \leq c^T x(\mu_k) - b^T u(\mu_k) \leq n\mu_k \leq n\mu_0. \tag{2}$$

Mit den Niveaumengen in Lemma 2.3.1 gilt also

$$x(\mu_k) \in Z_p(f^* + n\mu_0), \quad y(\mu_k) \in N_D(f^* - n\mu_0)$$

und die Niveaumengen sind nach Lemma 2.3.1 kompakt. Wegen $A^T u(\mu_k) = c - y(\mu_k)$ liegt mit $y(\mu_k)$ auch $u(\mu_k)$ in einem Kompaktum, da A nach Vor. vollen Zeilenrang hat. Also: $(x(\mu_k), u(\mu_k), y(\mu_k))$ liegt in einer kompakten Teilmenge von Z, hat also mindestens einen Häufungspunkt $(x^*, u^*, y^*) \in Z$. Wegen (1), (2) folgt

$$c^T x^* = f^* = b^T u^*$$

und daher $(x^*, u^*, y^*) \in \Omega$.

Schließlich gilt wegen c)

$$y_i^* \geq 1/C_1 \quad i \in N, \qquad x_i^* \geq 1/C_2 \quad i \in B,$$

also $x^* + y^* > 0$ wegen $B \cup N = \{1, \ldots, n\}$