Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung: Lösungsvorschlag

G4.

zu a):

$$\min \varphi(x;\mu) := c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \quad \text{u.d. NB} \quad Ax = b, \;\; x > 0. \qquad (\mathrm{BP}_\mu)$$

$\nabla\varphi(x;\mu) = c - \mu X^{-1}e$, $X^{-1} = \operatorname{diag}(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$.

Die Optimalittasbedingungen lauten

$$c - \mu X(\mu)^{-1}e + A^T u = 0, \quad Ax = b, \quad x > 0.$$

zu b): Der Punkt $(u(\mu), y(\mu)) := (-u, \mu X(\mu)^{-1}e)$ ist zulässig für (DP), da $\mu X(\mu)^{-1}e - A^T u = c$, $\mu X(\mu)^{-1}e > 0$.

zu c): Nach dem schwachen Dualitätssatz ist

$$c^T x(\mu) - f^* \leq c^T x(\mu) - b^T u(\mu) = x(\mu)^T y(\mu) = \mu x(\mu)^T X(\mu)^{-1} e = \mu e^T e = \mu n.$$

G5.

zu a):

Die Äquivalenz von

$$\begin{pmatrix} c - A^T u - \mu X^{-1} e \\ Ax - b \end{pmatrix} = 0. \qquad (\mathrm{PKKT})$$

und

$$\begin{pmatrix} c - A^T u - y \\ Ax - b \\ Xy - \mu e \end{pmatrix} = 0. \qquad (\mathrm{PDKKT})$$

mit dem Zusammenhang $y = \mu X^{-1}e$ ist im Skript gezeigt.

zu b): Newton-System für (PKKT):

$$\begin{pmatrix} \mu X^{-2} & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c - \mu X^{-1} e - A^T u \\ Ax - b \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Newton-System für (PDKKT):

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c - y - A^T u \\ Ax - b \\ Xy - \mu e \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

zu c): $(x_0, u_0) \in Z_P^\circ$ und $y_0 = \mu X_0^{-1} e$. Dann liefert (1)

$$\begin{pmatrix} \mu X_0^{-2} & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta u_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c - \mu X_0^{-1} e - A^T u_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Andererseits lautet (2)

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ \mu X_0^{-1} & 0 & X_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta u_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c - \mu X_0^{-1} e - A^T u_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Die letzte Zeile von (4) ergibt $\Delta y_0 = -\mu X_0^{-2} \Delta x_0$. Daher liefert die erste Zeile von (4)

$$\mu X_0^{-2} \Delta x_0 - A^T \Delta u_0 = -(c - \mu X_0^{-1} e - A^T u_0)$$

und dies ist genau die erste Gleichung in (3).

Zusammen zeigt dies mit der zweiten Zeile von (4), dass $\Delta x_0, \Delta u_0$ in (3) und (4) dasselbe System (3) erfüllen. Also liefern sie dasselbe $x_1 = x_0 + \Delta x_0$.

zu d): (PKKT) lautet

$$1 - \mu x^{-1} = 0$$

und das zugehörige Newton-Verfahren

$$\mu x_k^{-2} \Delta x_k = \mu x_k^{-1} - 1.$$

Die Lösung von (PKKT) ist also $x(\mu) = \mu$.

(PDKKT) lautet

$$\begin{pmatrix} 1 - y \\ xy - \mu \end{pmatrix} = 0$$

und das zugehörige Newton-Verfahren

$$\begin{pmatrix} -\Delta y_k \\ y_k \Delta x_k + x_k \Delta y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k - 1 \\ \mu - x_k y_k \end{pmatrix},$$

Sei nun $\mu = 2/3$, dann lautet die Lösung von (PKKT) $x(2/3) = 2/3$. Für $\mu = 2/3$ und $x_0 = 1$ liefert das primale Verfahren

$$x_0 = 1;\ x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = \frac{5}{8} = 0.625;\ x_3 = \frac{85}{128} = 0.6640625;\ x_4 = \frac{21845}{32786} \approx 0.6666564941$$

Für $\mu = 2/3$ und $(x_0, y_0) = (1, 2/3)$ liefert das primal-duale Verfahren

$$x_0 = 1;\ x_1 = \frac{2}{3},$$

konvergiert hier also in einem Schritt.

Das primal-duale Verfahren ist somit effizienter, was auf die geringere Nichtlinearität zurückzuführen ist.