Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G12. Beispiele für selbstkonkordante Barrierefunktionen

Verwenden Sie das Selbstkonkordanz-Kriterium

- $(x_k) \subset S^\circ, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x \in \partial S \implies p(x_k) \to \infty,$
- Für alle $x \in S^\circ$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, mit $\psi_{x,v}(t) := p(x+tv)$ gilt
$$|\psi'''_{x,v}(0)| \leq 2\psi''_{x,v}(0)^{3/2} > 0$$

um die Selbstkonkordanz der folgenden Funktionen nachzuweisen.

a) Die log-Barrierefunktion $p : x \in S^\circ \mapsto -\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ für $S^\circ = \mathbb{R}^n_{++}$. Bestimmen Sie zudem die Komplexitätszahl
$$\vartheta_p := \sup_{x\in S^\circ} \|H(x)^{-1}g(x)\|^2_{H(x)} < \infty,$$
Tip: Benutzen Sie die Ungleichung $\left(\sum_{i=1}^n y_i^3\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^3$.

b) Die Funktion $p : X \in S^\circ \mapsto -\ln(\det(X))$ mit
$$S^\circ = \{X \in \mathbb{R}^{n,n} \; : \; X = X^T, \; X \text{ positiv definit}\}.$$
Sie dürfen folgendes benutzen: Zu $X \in S^\circ$ gibt es $X^{1/2} \in S^\circ$ mit $X = X^{1/2}X^{1/2}$. Gehen Sie wie folgt vor:

i) Zeigen Sie, dass für jedes symmetrische $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt
$$p(X+tV) = -2\ln(\det(X^{1/2})) - \ln(\det(I + tX^{-1/2}VX^{-1/2})).$$

ii) Bezeichnen $\lambda_1, \dots \lambda_n$ die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $X^{-1/2}VX^{-1/2}$, dann gilt
$$\psi_{X,V}(t) = p(X+tV) = \text{const} - \sum_{i=1}^n \ln(1+t\lambda_i).$$

iii) Benutzen Sie nun den Tip aus a).

G13. Asymptotik selbstkonkordanter Barrierefunktionen

Beweisen Sie den folgenden Satz der Vorlesung:

Satz 4.2.2 *Es sei $p \in SCB(S^\circ)$, $x \in S^\circ$ und $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \tau d \in S^\circ$ für alle $\tau \geq 0$. Dann gilt*
$$p(x+\tau d) \geq p(x+d) - \vartheta_p \ln(\tau) \quad \forall\, \tau \geq 1.$$

Tip: Betrachten Sie die Funktion $\phi(t) := p(x + e^t d)$, $t \geq 0$.