Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G10. Konvexe QPs als SDPs

Sei $Q \in S^{n\times n}$, $Q \succeq 0$. Dann gibt es $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $Q = M^T M$ (z.B. $M = Q^{1/2}$) und folgende Bedingungen sind äquivalent:

$$c^T x + \frac{1}{2}x^T Q x \leq t. \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} I & Mx \\ (Mx)^T & 2t - 2c^T x \end{pmatrix} \succeq 0. \tag{2}$$

G11. Selbstkonkordante Barriere-Funktionen

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen mit nichtleerem Inneren S°.

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $p : S^\circ \to \mathbb{R}$ heißt *selbstkonkordante Barrierefunktion für* S, falls für alle $x \in S^\circ$ gilt:

- $H(x) := \nabla^2 p(x)$ positiv definit,
- $B_{H(x)}(x,1) := \{y : \ \|y-x\|_{H(x)} < 1\} \subset S^\circ$,
- die zugehörigen lokalen Normen $\|v\|_{H(x)} := \sqrt{v^T H(x) v}$ erfüllen die relative Lipschitz-Bedingung

  $$1 - \|y-x\|_{H(x)} \leq \frac{\|v\|_{H(y)}}{\|v\|_{H(x)}} \leq \frac{1}{1-\|y-x\|_{H(x)}} \quad \forall\, y \in B_{H(x)}(x,1),\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

- $\vartheta_p := \sup_{x\in S^\circ} \|H(x)^{-1}\nabla p(x)\|^2_{H(x)} < \infty$.

Zeigen Sie: $p(x) = -\sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ ist eine selbstkonkordante Barrierefunktion für $S = \mathbb{R}^n_+$ mit $\vartheta_p = n$.

Hausaufgaben:

H6. SOCPs als SDPs

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

$$\|u\|_2 \leq t \tag{3}$$

und

$$\begin{pmatrix} tI & u \\ u^T & t \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{4}$$

Bitte wenden!

H7. Grundkonzept einer Bewertungsfunktion für nichtkonvexe Probleme

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \;\text{ unter der Nebenbed. }\; Ax = b, \;\; x \geq 0 \tag{LP}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Bezeichne $\mu \in \mathbb{R}_{++} \to (x(\mu), u(\mu), y(\mu)) \in Z^\circ$ den zugehörigen primal-dualen zentralen Pfad.

Zeigen Sie: Für jedes $\nu > 0$ ist $(x(\mu), y(\mu))$ die eindeutige Lösung Problems

$$\min c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(x_i) + \nu \left(\ln(x_i y_i/\mu) + 1 - x_i y_i/\mu\right)\right) \;\text{ u. d. NB }\; Ax = b, \quad x, y > 0.$$

Bemerkung: Diese Beobachtung kann als Basis zur Globalisierung für nichtkonvexe Probleme genutzt werden.

Abgabe der Hausaufgaben: In der nächsten Übung.