Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G8. Dualität bei konvexen QPs

Betrachte das konvexe quadratische Optimierungsproblem

$$\min \quad q(x) := c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \quad \text{s. t. } x \in \mathbb{R}^n, \;\; Ax = b, \;\; x \geq 0 \qquad \text{(CQP)}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq m < n$, $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv semidefinit, $c \in \mathbb{R}^n$.

Das zu (CQP) duale Problem lautet

$$\max \quad d(x,u) := b^T u - \frac{1}{2} x^T Q x \quad \text{s. t. } u \in \mathbb{R}^m, \quad -Qx + A^T u + y = c, \;\; y \geq 0. \qquad \text{(DQP)}$$

Es sei (x, u, y) primal-dual zulässig. Zeigen Sie:

Es gilt $q(x) - d(x,u) = x^T y \geq 0$.
Ist $q(x) - d(x,u) = 0$, dann ist (x,u,y) primal-dual optimal.
Ist f^* der Optimalwert von (CQP), dann gilt $0 \leq q(x) - f^* \leq x^T y$.

G9. Tangente des zentralen Pfads

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \;\; \text{unter der Nebenbed. } Ax = b, \;\; x \geq 0 \qquad \text{(LP)}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und A habe vollen Zeilenrang. Nach G7. gibt es eine strikt komplementäre Lösung $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ und mit der Partition $B = \{i \, : \, \bar{x}_i > 0\}$, $N = \{i \, : \, \bar{y}_i > 0\}$ existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned} 0 < x_i(\mu) \leq C_1 \mu, \quad & y_i(\mu) \geq 1/C_1 \quad \forall\, i \in N, \\ 0 < y_i(\mu) \leq C_2 \mu, \quad & x_i(\mu) \geq 1/C_2 \quad \forall\, i \in B. \end{aligned}$$

Ferner existiert für bel. $\mu_0 > 0$ nach Lemma 2.3.1 und 2.3.3 eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|x(\mu)\|_2 + \|y(\mu)\|_2 \leq C \quad \forall\, \mu \in (0, \mu_0].$$

a) Zeigen Sie, dass $(x'(\mu), u'(\mu), y'(\mu)) := \frac{d}{d\mu}(x(\mu), u(\mu), y(\mu))$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y(\mu) & 0 & X(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\mu) \\ u'(\mu) \\ y'(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}.$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass mit $D = X(\mu)^{1/2} Y(\mu)^{-1/2}$ gilt $D^{-1} x'(\mu) + D y'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} e$.

c) Folgern Sie $\|D^{-1}x'(\mu)\|_2^2 + \|Dy'(\mu)\|_2^2 \le \frac{n}{\mu}$.

d) Zeigen Sie unter Verwendung von c), dass gilt

$$
\begin{aligned}
|x_i'(\mu)| &\le C_1\sqrt{n}, \quad |y_i'(\mu)| \le \frac{C}{\mu}\sqrt{n}, \quad i \in N,\\
|y_i'(\mu)| &\le C_2\sqrt{n}, \quad |x_i'(\mu)| \le \frac{C}{\mu}\sqrt{n}, \quad i \in B.
\end{aligned}
$$

Wir setzen ab jetzt voraus, dass (LP) eine optimale nichtentartete Ecke $\bar{x}$ hat, in der strikte Komplementarität gelte. Dann gilt also $|N| = n - m$, $(A^T, (e_i)_{i\in N})$ nichtsingulär, $\bar{x} + \bar{y} > 0$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

e) Es gibt eine Konstante $\kappa > 0$ mit $|x_i'(\mu)| \le \kappa C_1 n, \quad 1 \le i \le n$.

f) Folgern Sie, dass $\lim_{\mu\searrow 0} x(\mu)$ existiert.

Bemerkung: Man kann e) auch zeigen, wenn keine optimale, strikt komplementäre, nichtentartete Ecke $\bar{x}$ existiert, dies ist aber aufwendiger.

Hausaufgaben:

H5. Unzulässige Innere-Punkte-Verfahren für LP

Unzulässige Innere-Punkte-Verfahren für LP können in einem Punkt (x_0, u_0, y_0) starten, für den nur $(x_0, y_0) > 0$ aber *nicht* $(x_0, u_0, y_0) \in Z^\circ$ gilt. Sie halten die Iterierten in der Umgebung

$$
\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma,\beta) := \Big\{(x,u,y) \in \mathbb{R}^{n+m+n} : \ (x,y) > 0,\ x_i y_i \ge \gamma\frac{x^Ty}{n} = \gamma\mu(x,y),\ i = 1,\dots,n,
$$
$$
\|(Ax - b, c - A^Tu - y)\|_2 \le \frac{\|(Ax_0 - b, c - A^Tu_0 - y_0)\|_2 \beta\mu(x,y)}{\mu(x_0,y_0)}\Big\}
$$

mit $0 < \gamma < 1 < \beta$. Anwendung des Newton-Verfahrens auf das gestörte Kuhn-Tucker-System $F_{\sigma\mu}(x,u,y) = 0$ ergibt anstelle (PD)

$$
\text{(PDI)} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Y & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c - A^Tu - y \\ Ax - b \\ Xy - \sigma\mu e \end{pmatrix}.
$$

Zeigen Sie, dass für jedes $(x,u,y) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma,\beta)$ gilt:

a) $|\Delta x^T\Delta y| \le \|r_D\|\|\Delta x\| + \|r_P\|\|\Delta u\|$ mit $r_P = Ax - b$, $r_D = c - A^Tu - y$.

b) Mit einer nur von (x_0, u_0, y_0) abhängigen Konstanten $C_0 > 0$ gilt

$$
\mu_+(\alpha) := \frac{x_+(\alpha)^T y_+(\alpha)}{n}, \quad x_+(\alpha) = x + \alpha\Delta x, \quad y_+(\alpha) = y + \alpha\Delta y
$$

die Abschätzung

$$
\mu_+(\alpha) \le \big(1 - \alpha(1-\sigma) + \alpha^2\frac{C_0}{n}(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|)\big)\mu.
$$

Bis auf einen quadratischen Term verhält sich das Dualitätsmaß also wie bei zulässigen Innere-Punkte-Verfahren.

Abgabe der Hausaufgaben: In der Übung am 13.1.2011.

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Jahr 2011!