Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2010/2011

Blatt 3

# Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

## G6. Das primal-duale Newtonsystem

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \quad \text{unter der Nebenbed.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{LP}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und $A$ habe vollen Zeilenrang. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann der zugehörige primal-duale zentrale Pfad $\mu \in \mathbb{R}_{++} \to (x(\mu), u(\mu), y(\mu)) \in Z^\circ$ wohldefiniert ist als Lösung von

$$F_\mu(x, u, y) := \begin{pmatrix} c - A^T u - y \\ Ax - b \\ Xy - \mu e \end{pmatrix} = 0, \quad x, y > 0. \tag{1}$$

a) Stellen Sie in $(x, u, y) \in Z^\circ$ die Newton-Gleichung

$$F'_\mu(x, u, y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta y \end{pmatrix} = -F_\mu(x, u, y).$$

für (1) auf.

b) Zeigen Sie, dass $F'_\mu(x, u, y)$ für beliebiges $(x, u, y) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n_{++}$ invertierbar ist.

c) Begründen Sie, dass die Newton-Gleichung sich reduzieren läßt auf ein Gleichungssystem der Form

$$ADA^T \Delta u = r$$

mit einer Diagonalmatrix $D$. Geben Sie $D$ und $r$ an. Wie erhält man nun $\Delta x$ und $\Delta y$?

## G7. Konvergenz des zentralen Pfads gegen strikt komplementäre Lösungen

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem (LP) aus **G6**. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und $A$ habe vollen Zeilenrang. Nach Vorlesung gilt dann $\Omega = \Omega_P \times \Omega_D \neq \emptyset$, (LP) und (DP) haben also optimale Lösungen.

Der Satz von Goldman-Tucker besagt, dass $\Omega$ eine *strikt komplementäre Lösung* enthält, es existiert also $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \Omega$ mit $\bar{x} + \bar{y} > 0$.
Sei also $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \Omega$ mit $\bar{x} + \bar{y} > 0$ und setze $B = \{i \,:\, \bar{x}_i > 0\}$, $N = \{i \,:\, \bar{y}_i > 0\}$. Zeigen Sie für den primal-dualen zentrale Pfad aus **G6** $\mu \in \mathbb{R}_{++} \mapsto (x(\mu), u(\mu), y(\mu))$:

a) Es gilt $(x(\mu) - \bar{x})^T (y(\mu) - \bar{y}) = 0$.

b) Folgern Sie $x(\mu)^T \bar{y} + y(\mu)^T \bar{x} = n\mu$.

c) Leiten Sie daraus her, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit

$$\begin{aligned} 0 < x_i(\mu) \le C_1\mu, \quad & y_i(\mu) \ge 1/C_1 \quad \forall\, i \in N, \\ 0 < y_i(\mu) \le C_2\mu, \quad & x_i(\mu) \ge 1/C_2 \quad \forall\, i \in B. \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie mit Resultaten aus der Vorlesung, dass für jede Nullfolge $\mu_k \searrow 0$ die Folge $(x(\mu_k), u(\mu_k), y(\mu_k))$ einen Häufungspunkt $(x^*, u^*, y^*)$ hat. Weisen Sie nach, dass $(x^*, u^*, y^*)$ eine strikt komplementäre Lösung von (LP), (DP) ist.

**Hausaufgaben:**

**H4. Primal-duale Barriere-Funktion** [10 Punkte]

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem (LP) aus **G6**. Es sei $Z^\circ \neq \emptyset$ und $A$ habe vollen Zeilenrang. Bezeichne $\mu \in \mathbb{R}_{++} \to (x(\mu), u(\mu), y(\mu)) \in Z^\circ$ den zugehörigen primal-dualen zentralen Pfad.

Zeigen Sie: $(x(\mu), u(\mu), y(\mu))$ ist die eindeutige Lösung des primal-dualen Barriereproblems

$$\min x^T y - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i y_i) \text{ unter der Nebenbed. } Ax = b, \quad A^T u + y = c, \quad x, y > 0. \quad (\mathrm{PD}_\mu)$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Stellen Sie die Optimalitätsbedingungen für (PD$_\mu$) auf.

b) Leiten Sie hieraus ab, dass für die Lösung von (PD$_\mu$) gilt

$$(x - \mu Y^{-1} e)^T (y - \mu X^{-1} e) = 0.$$

c) Folgern Sie, dass mit einer geeigneten positiv definiten Matrix $M$ gilt

$$\|Xy - \mu e\|_M^2 = 0.$$

Warum stimmt also die Lösung von (PD$_\mu$) mit $(x(\mu), u(\mu), y(\mu))$ überein?

**Abgabe der Hausaufgaben:** Am 8.12.2006 in der Übung.