Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2010/2011

Blatt 2

Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G4. Zentraler Pfad und Dualitätslücke

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \quad \text{unter der Nebenbed.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{LP}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Stellen Sie das log-Barriereproblem (LP$_\mu$) zu (LP) auf und geben Sie die Bestimmungsgleichung für den zentralen Pfad $\mu \mapsto x(\mu)$ an (Optimalitätsbedingungen für (LP$_\mu$)).

b) Lesen Sie aus der Gleichung für den zentralen Pfad einen Punkt $(u(\mu), y(\mu))$ ab, der für das Dualproblem (DP) von (LP) zulässig ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass für den Optimalwert f^* von (LP) gilt

$$c^T x(\mu) - f^* \leq n\mu.$$

G5. Vergleich von primalen und primal-dualen Verfahren für LP

Wir betrachten wieder das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \quad \text{unter der Nebenbed.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{LP}$$

Das Optimalitätssystem aus G4 a) sei das Gleichungssystem

$$F_\mu(x, u) = 0. \tag{PKKT}$$

a) Zeigen Sie, dass (PKKT) äquivalent ist zum primal-dualen System

$$F_{\mu,PD}(x, u, y) := \begin{pmatrix} c - A^T u - y \\ Ax - b \\ Xy - \mu e \end{pmatrix} = 0. \tag{PDKKT}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen x und y?

b) Schreiben Sie die Newton-Gleichung für (PKKT) und (PDKKT) auf.

c) Weisen Sie nach, dass ausgehend von einem Punkt $(x_0, u_0) \in Z_P^\circ$ bzw. dem korrespondierenden Punkt $(x_0, u_0, y_0) := (x_0, u_0, \mu X_0^{-1} e) \in Z_D^\circ$ der *erste* Newton-Schritt für (PKKT) und der für (PDKKT) denselben Punkt $x_1 = x_0 + \Delta x_0$ liefert.

d) Stellen Sie (PKKT) und (PDKKT) für das einfache LP

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x \quad \text{s.t.} \quad x \geq 0$$

auf und formulieren Sie für beide Varianten das Newton-Verfahren. Vergleichen Sie die erzeugten Iterierten (x_k) für $\mu = 2/3$ und die Startpunkte $x_0 = 1$ bzw. $(x_0, y_0) := (x_0, \mu/x_0) = (1, 2/3)$. Ist das Newton-Verfahren für (PKKT) oder (PDKKT) effizienter?

Hausaufgaben:

H3. Newton-Verfahren für Barriere-Probleme [10 Punkte]

Wir betrachten das einfache lineare Optimierungsproblem

$$\min c^T x \text{ unter der Nebenbed. } x \geq 0 \tag{LPs}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $c \geq 0$. Bezeichne $x(\mu)$ die Lösung des zugehörigen log-Barriereproblems (BP$_\mu$).

Notationen: Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ sei $X := \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$. Für eine symmetrische, positiv definite Matrix $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei

$$\|x\|_M := \sqrt{x^T M x}$$

mit zugehöriger Matrixnorm $\|C\|_M = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Cx\|_M}{\|x\|_M}$.

a) Stellen Sie die Newton-Gleichung $F'_\mu(x)\Delta x = -F_\mu(x)$ zur Lösung des Barriereproblems (BP$_\mu$) auf.

b) Zeigen Sie, dass gilt (beachten Sie, dass $\|v\|_{X(\mu)^{-2}} = \|X(\mu)^{-1}v\|$)

$$\begin{aligned}&\|x - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_i}{x(\mu)_i} \in [1-\theta, 1+\theta] \\ &\Longrightarrow \quad \|I - F'_\mu(x)^{-1} F'_\mu(x(\mu) + \tau(x - x(\mu)))\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta(2+\theta) \quad \forall \tau \in [0,1].\end{aligned}$$

Hinweis: Es gilt $\|C\|_{X(\mu)^{-2}} = \|X(\mu)^{-1} C X(\mu)\|$.

c) Folgern Sie mit Satz 1.4.1 des Skripts, dass für jedes $0 < \theta < \sqrt{2} - 1$ gilt: Für jedes x_0 mit $\|x_0 - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta$ erzeugt die Newton-Iteration

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \quad F'_\mu(x_k)\Delta x_k = -F_\mu(x_k)$$

eine Folge (x_k) mit

$$\|x_{k+1} - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta(2+\theta)\|x_k - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}}$$

und konvergiert somit gegen $x(\mu)$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass mit geeignetem $0 < \beta < 1$ nahe genug an 1 gilt

$$\|x_0 - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta \quad \Longrightarrow \quad \|x_1 - x(\beta\mu)\|_{X(\beta\mu)^{-2}} \leq \theta.$$

Man kann also iterativ nach einem Newton-Schritt μ auf $\beta\mu$ verkleinern, für $\beta\mu$ den nächsten Newton-Schritt durchführen usw.

Anstelle der nicht prüfbaren Bedingung $\|x - x(\mu)\|_{X(\mu)^{-2}} \leq \theta$ kann man auch $\|\Delta x\|_{X^{-2}} \leq \theta$ verwenden, die Analysis wird dann etwas aufwendiger (siehe Vorlesung).

Abgabe der Hausaufgaben: Am 25.11.2010 in der Übung.