Übungen zur Vorlesung Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung

G1. Strikt zulässige Punkte

Gegeben seien stetige Funktionen $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$. Setze $h = (h_1, \ldots, h_l)^T$ und betrachte die Menge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ h(x) \leq 0\},$$

sowie das *strikte Innere* S° von S

$$S^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ h(x) < 0\}$$

und den *offenen Kern* $\mathring{S} = S \setminus \partial S$ von S.

a) Zeigen Sie: Sind $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $1 \leq i \leq l$, und ist S° nichtleer, dann gilt $S^\circ = \mathring{S}$.
b) Geben Sie stetige $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq l$, an, für die gilt $S^\circ \neq \emptyset$, aber $S^\circ \neq \mathring{S}$.

G2. Zentraler Pfad

Wir betrachten das konvexe quadratische Optimierungsproblem

$$\min \frac{x_1^2}{2} + x_2 \ \text{ unter der Nebenbed. } \ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \qquad \text{(QP)}$$

a) Stellen Sie das Barriereproblem (BP$_\mu$) zu (QP) bei Verwendung der log-Barrierefunktion auf. Berechnen Sie Gradient und Hessematrix der Zielfunktion von (BP$_\mu$).
b) Bestimmen Sie die Lösung $x(\mu)$ von (BP$_\mu$) und skizzieren Sie den zentralen Pfad.
c) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = \lim_{\mu \searrow 0} x(\mu)$ existiert und dass $\bar{x}$ Lösung von (QP) ist.
d) Wie ändert sich der zentrale Pfad, wenn die Nebenbedingung $x_2 \geq 0$ in (QP) m-mal auftritt?

G3. Konvexe quadratische Nebenbedingung als Second-Order-Cone-Nebenbedingung

Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch positiv definit, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die streng konvexe quadratische Nebenbedingung

$$\frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma \leq 0$$

als Second-Order-Cone-Nebenbedingung, also in der Form

$$\|Cx + a\| \leq d^T x + e$$

mit geeigneten $C \in \mathbb{R}^{m,n}$, $a \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^n$, $e \in \mathbb{R}$.
Tip: Es gibt $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Q = R^T R$ (z.B. durch Cholesky-Faktorisierung).

Bitte wenden!

Hausaufgaben:

H1. Log-Barriere-Funktion für die Menge positiv semidefiniter Matrizen [4 Punkte]

Sei

$$S := \left\{X \in \mathbb{R}^{n,n} \;:\; X = X^T,\;\; X \text{ positiv semidefinit}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die **Barrierefunktion**

$$p : \mathring{S} \to \mathbb{R}, \quad p(X) := -\ln(\det(X))$$

die *Barriere-Eigenschaften* hat

$$(X_k) \subset \mathring{S}, \quad \lim_{k\to\infty} X_k = X \in \partial S \implies p(X_k) \to \infty.$$

Tip: $\mathring{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^{n,n} \;:\; X = X^T,\;\; X \text{ positiv definit}\right\}$.

H2. Algorithmus LOGB für lineare Programme [6 Punkte]

Betrachte für $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ das lineare Programm

$$\min\; c^T x \quad \text{unter der Nebenbedingung} \;\; Ax = b,\;\; x \geq 0. \tag{LP}$$

a) Stellen Sie das Barriereproblem (BP$_\mu$) zu (LP) bei Verwendung der log-Barrierefunktion auf. Berechnen Sie Gradient und Hessematrix der Zielfunktion von (BP$_\mu$).

b) Zeigen Sie, dass (BP$_\mu$) höchstens eine Lösung $x(\mu)$ hat.

c) Geben Sie mit Hilfe geeigneter Aussagen der Vorlesung notwendige Optimalitätsbedingungen für (BP$_\mu$) an.

Abgabe der Hausaufgaben: Am 10.11.2010 in der Übung.