# Mathematik III für Bauwesen
# 15. Übungsblatt

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Roland Pulch**
Andreas Gärtner
Florian Seib

**Wintersemester 2010/2011**
**11. Februar 2011**

## Gruppenübung

Auf diesem Übungsblatt gibt es nur noch Gruppenübungen. Der Umfang dieses Übungsblatts ist zu groß um alle Aufgaben in der Übung vollständig zu bearbeiten. Die Aufgaben G46-G49 sind als freiwillige Hausübungen anzusehen, zu denen Lösungshinweise wie üblich herausgegeben werden.

**Aufgabe G43** (Schätzer)
Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unabhängige Folge identisch $R(0, \theta)$ - verteilter Zufallsvariablen (d.h. Gleichverteilung im Intervall $[0, \theta]$).

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \frac{2}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Varianz von $T_n$.

(c) Zeigen Sie, dass $T_1, T_2, \ldots$ eine konsistente Schätzerfolge für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

(d) Sei

$$\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \frac{4}{n^2} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$ ist.

(e) Modifizieren Sie $\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ geeignet, so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ ergibt.

**Aufgabe G44** (Maximum-Likelihood-Schätzer – stetige Verteilung)
Aus Erfahrung sei bekannt, dass die störungsfreie Betriebsdauer eines bestimmten Systems durch eine stetig verteilte Zufallsvariable $X$ mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta \cdot x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Bestimmen Sie aus den folgenden 20 Betriebsdauern (in 1000 Stunden) den Maximum-Likelihood Schätzwert für $\theta$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.530 | 1.173 | 1.832 | 1.075 | 1.539 |
| 0.998 | 2.083 | 0.693 | 2.529 | 1.693 |
| 1.325 | 1.487 | 1.298 | 1.743 | 1.432 |
| 1.369 | 0.987 | 2.222 | 1.818 | 1.505 |

**Aufgabe G45** (Konfidenzintervalle)
Bei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4.

Diese Messwerte werden als Realisationen der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_9$ angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt seien.

(a) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert $\mu$ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.

(b) Welches Konfidenzintervall ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?

(c) Ermitteln Sie im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für die Varianz $\sigma^2$.

*Hinweis*: Die benötigten Quantile können im Anhang des Skripts nachgeschlagen werden.

**Aufgabe G46** (Schätzer II)
Die stetigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{12x(x-\sqrt{\theta})^2}{\theta^2} & \text{für } 0 \le x \le \sqrt{\theta}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X_i$ in Abhängigkeit von $\theta$.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{5}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$ gegeben ist.

(c) Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$?

**Aufgabe G47** (Maximum-Likelihood-Schätzer – diskrete Verteilung)

(a) Bei einem psychologischen Test sind entweder 0, 1 oder 2 Punkte zu erreichen. Aus Erfahrung weiß man, dass das Testergebnis durch eine diskrete Zufallsvariable $X$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß des Typs

$$P_\theta(X=0) = \tfrac{\theta}{2}, \quad P_\theta(X=1) = 1-\theta, \quad P_\theta(X=2) = \tfrac{\theta}{2} \qquad \text{mit } \theta \in (0,1)$$

gut beschrieben werden kann. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert zu den Daten $0,0,2,1,2,2$ (d.h. sechs Realisierungen von $X$ sind gegeben).

(b) Es sei $X$ binomial-verteilt mit $B(n,p)$ für unbekanntes $p$. Bei einer Realisierung werden $k$ Treffer erzielt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erwartungswert von $X$.

*H*inweis: Hier soll nicht aus einem Schätzer für $p$ ein Schätzer für den Erwartungswert konstruiert werden.

**Aufgabe G48** (Konfidenzintervall II)
Bei einer Umfrage unter Besitzern eines weit verbreiteten PKW-Typs gaben 321 von 689 Befragten (unter anderem) an, dass sie mit ihrem Auto bisher sehr zufrieden sind. Berechnen Sie mit einer geeigneten Näherung ein Konfidenzintervall zum Niveau 0.9 für die Wahrscheinlichkeit $p$, dass ein zufällig ausgewählter Besitzer diese Auto-Typs angibt, mit seinem Auto sehr zufrieden zu sein.
*Hinweis*: Verwenden Sie bei der Näherung den Zentralen Grenzwertsatz.

**Aufgabe G49** (Konfidenzintervall III)
**EINE EXTRA-AUFGABE NUR FÜR KÖNNER.**
Es sei eine gleichverteilte Zufallsvariable $X \sim R(a, a+d)$ mit Intervallgrenzen $a$ und $a+d$ gegeben. $d > 0$ sei bekannt, $a$ hingegen unbekannt. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen identisch verteilt wie $X$. Wir möchten die untere Intervallgrenze $a$ schätzen. Naheliegend ist der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \min_{i=1,\ldots,n} X_i.$$

Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für $a$ der Form $[T_n - c, T_n]$ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$, d.h. bestimmen Sie ein geeignetes $c > 0$-