

Mathematik III für Bauwesen

14. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
07. Februar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Tschebyscheff-Ungleichung)

Bei der Beladung eines LKW mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gewicht der Ladung höchstens 7.8 Tonnen beträgt. Die Gewichte [in kg] der einzelnen Kisten sollen durch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben werden, für die folgende Dichte angenommen wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{für } 105 \leq x \leq 135 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.
- Bestimmen Sie mittels der Ungleichung von Tschebyscheff eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von $n = 64$ dieser Kisten zwischen 7.56 Tonnen und 7.8 Tonnen liegt.

Aufgabe G41 (Zentraler Grenzwertsatz)

Ein Fußballspieler schießt beim Training wiederholt auf eine Torwand. Es ist bekannt, dass er in 21% aller Fälle einen Treffer erreicht. Der Spieler schieße n mal auf die Torwand und es bezeichne X_n die Anzahl der Treffer.

Wie ist X_n verteilt (unter passenden Annahmen)?

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Treffer erreicht werden, jeweils

- exakt,
- näherungsweise mit dem Zentralen Grenzwertsatz ohne Stetigkeitskorrektur,
- näherungsweise mit dem Zentralen Grenzwertsatz mit Stetigkeitskorrektur,

und dies jeweils in den beiden Fällen

$$(a) \quad n = 10 \quad \text{und} \quad (b) \quad n = 30.$$

Aufgabe G42 (Arithmetisches Mittel von Zufallsvariablen)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Standardabweichung $\sigma = 0.2$. Es kann eine beliebig große Stichprobe von Realisierungen der Zufallsvariablen X genommen werden. Gesucht ist der Stichprobenumfang n damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% die Abweichung des arithmetischen Mittels der Stichprobe vom tatsächlichen Erwartungswert μ weniger als 0.1 beträgt.

- Bestimmen Sie eine obere Schranke für n durch Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung.
- Bestimmen Sie n exakt.

Hausübung

Aufgabe H40 (Erwartungswert und Varianz)

(6 Punkte)

Wir betrachten einen Tetraeder, dessen Seiten mit 1 bis 4 durchnummeriert sind (Interpretation als vierseitiger Würfel). Wir werfen den Tetraeder zweimal hintereinander. Es sei X_1 und X_2 die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Bestimmen Sie jeweils den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Zufallsvariablen.

- (a) X_i für $i = 1, 2$,
- (b) $Y := X_1 + X_2$,
- (c) $V := X_1 + X_1^2$
- (d) $W := X_1 + X_1^2 + X_2$

Hinweis: Beachten Sie, welche der Zufallsvariablen jeweils unabhängig voneinander sind.

Aufgabe H41 (Zentraler Grenzwertsatz II)

(6 Punkte)

In einem Labor wird eine Flüssigkeit maschinell in 50 Reagenzgläser gefüllt. Die Maschine ist auf einen Abfüllwert von 10 [ml] eingestellt. Aus Erfahrung weiß man, dass dabei eine Streuung von 1 [ml] auftritt. Nach einem weiteren Verarbeitungsschritt, welcher das Volumen der abgefüllten Menge nicht beeinflusst, werden alle 50 Proben in ein Gefäß umgefüllt. Mit Y bezeichnen wir das Volumen der insgesamt abgefüllten Flüssigkeit.

Hinweis: Die genaue Verteilung der Füllmenge im einzelnen Reagenzglas ist hier nicht bekannt. Lediglich die obigen Kennzahlen sind gegeben.

- a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .
- b) Berechnen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass Y um mehr als 5 [ml] von $E(Y)$ abweicht.

Aufgabe H42 (Summe exponentialverteilter Zufallsvariablen)

(8 Punkte)

Eine Angestellte einer Bank verläßt an 225 Arbeitstagen eines Jahres ihr Büro jeweils kurz nach Dienstschluss. Die Dauer der zusätzlichen Arbeitszeit an einem Tag kann durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von 10 Minuten angemessen beschrieben werden. Die Zufallsvariablen zu den einzelnen Tage seien als unabhängig vorausgesetzt.

- (a) Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass die Angestellte in einem Jahr insgesamt mehr als 32 Stunden zusätzlich arbeitet.
- (b) Verwenden Sie die Tschebyscheff-Ungleichung, um für die exakte Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil (a) eine grobe untere Schranke zu bestimmen.