

Mathematik III für Bauwesen

13. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
31. Januar 2011

Gruppenübung

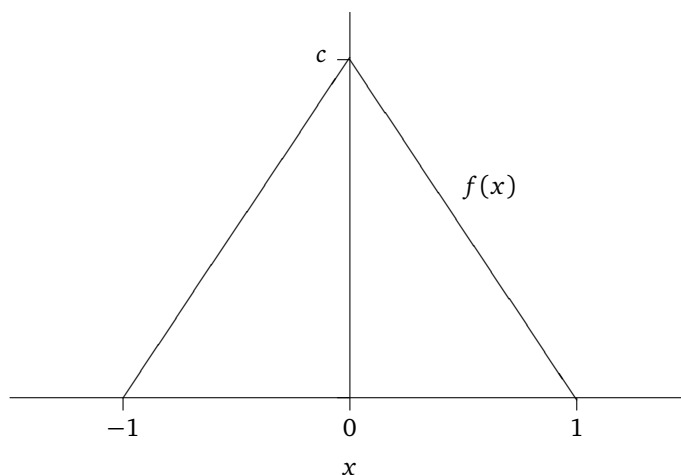
Aufgabe G37 (Erwartungswert und Varianz von diskreter Zufallsvariable)

Es werden unabhängig voneinander eine Reihe von Schüssen auf eine Zielscheibe mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von je $p = 0.8$ abgefeuert. Das Schießen soll nach dem ersten Treffer abgebrochen werden, insgesamt dürfen aber nicht mehr als 4 Schüsse abgegeben werden.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?
- Als Zufallsgröße X wird die Anzahl der abgefeuerten Schüsse definiert. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X .
- Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

Aufgabe G38 (Dichte- und Verteilungsfunktion)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichte f folgender Form:



- Berechnen Sie die Konstante c .
- Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von X .
- Berechnen Sie $P(X \leq -0.5)$, $P(0 \leq X \leq 0.5)$ und $P(X^2 \geq 0.25)$.
- Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von X an.

Aufgabe G39 (Exponentialverteilung)

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Hausübung

Aufgabe H37 (Dichte- und Verteilungsfunktion II)

(8 Punkte)

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{x}{1+cx} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$.
- (b) Berechnen Sie die Dichtefunktion zu dieser Verteilungsfunktion.
- (c) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel der Erwartungswert der Zufallsvariablen X nicht existiert.
- (d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_Y der Zufallsvariablen $Y = \sqrt{|X|}$.

Hinweis: Drücken Sie $P(Y \leq x)$ durch $P(a \leq X \leq b)$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$ aus.

Aufgabe H38 (Gleichverteilung)

(7 Punkte)

Es sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{für } 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

gegeben

- (a) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von X an.
- (b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion $g_Y(y)$ der Zufallsvariablen $Y = e^X$.
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .

Aufgabe H39 (Normalverteilung)

(5 Punkte)

Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dicke X untersucht wird. Es kann angenommen werden, dass X normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 20$ mm und $\sigma = 0.05$ mm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Platte Ausschuss,

- (a) wenn die Platte mindestens 19.92 mm stark sein soll?
- (b) wenn die Platte maximal 20.1 mm stark (aber beliebig dünn) sein darf?
- (c) wenn die Dicke der Platte um maximal 0.09 mm vom Sollwert 20 mm abweichen darf?
- (d) Wie muss die Konstante c in den Toleranzgrenzen $20 - c$ und $20 + c$ für die Plattendicke gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss nicht mehr als 1% beträgt?