

# Mathematik III für Bauwesen

## 13. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Roland Pulch  
Andreas Gärtner  
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011  
31. Januar 2011

### Gruppenübung

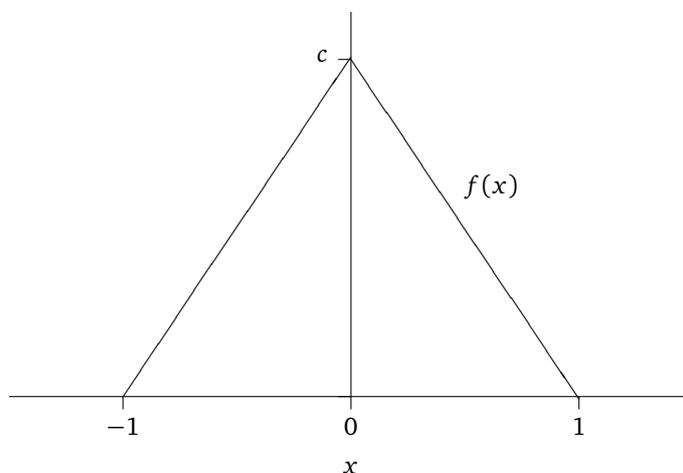
#### Aufgabe G37 (Erwartungswert und Varianz von diskreter Zufallsvariable)

Es werden unabhängig voneinander eine Reihe von Schüssen auf eine Zielscheibe mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von je  $p = 0.8$  abgefeuert. Das Schießen soll nach dem ersten Treffer abgebrochen werden, insgesamt dürfen aber nicht mehr als 4 Schüsse abgegeben werden.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?
- Als Zufallsgröße  $X$  wird die Anzahl der abgefeuerten Schüsse definiert. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- Bestimmen Sie  $E(X)$  und  $Var(X)$ .

#### Aufgabe G38 (Dichte- und Verteilungsfunktion)

Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichte  $f$  folgender Form:



- Berechnen Sie die Konstante  $c$ .
- Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion  $F$  von  $X$ .
- Berechnen Sie  $P(X \leq -0.5)$ ,  $P(0 \leq X \leq 0.5)$  und  $P(X^2 \geq 0.25)$ .
- Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  an.

#### Aufgabe G39 (Exponentialverteilung)

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit  $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$  angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

---

### Hausübung

---

#### Aufgabe H37 (Dichte- und Verteilungsfunktion II)

(8 Punkte)

Es sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{x}{1+cx} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstante  $c \in \mathbb{R}$ .
- (b) Berechnen Sie die Dichtefunktion zu dieser Verteilungsfunktion.
- (c) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $X$  nicht existiert.
- (d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F_Y$  der Zufallsvariablen  $Y = \sqrt{|X|}$ .

*Hinweis:* Drücken Sie  $P(Y \leq x)$  durch  $P(a \leq X \leq b)$  mit geeigneten  $a, b \in \mathbb{R}$  aus.

#### Aufgabe H38 (Gleichverteilung)

(7 Punkte)

Es sei  $X$  eine gleichverteilte Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{für } 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

gegeben

- (a) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  an.
- (b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion  $g_Y(y)$  der Zufallsvariablen  $Y = e^X$ .
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $Y$ .

#### Aufgabe H39 (Normalverteilung)

(5 Punkte)

Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dicke  $X$  untersucht wird. Es kann angenommen werden, dass  $X$  normalverteilt ist mit den Parametern  $\mu = 20$  mm und  $\sigma = 0.05$  mm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Platte Ausschuss,

- (a) wenn die Platte mindestens 19.92 mm stark sein soll?
- (b) wenn die Platte maximal 20.1 mm stark (aber beliebig dünn) sein darf?
- (c) wenn die Dicke der Platte um maximal 0.09 mm vom Sollwert 20 mm abweichen darf?
- (d) Wie muss die Konstante  $c$  in den Toleranzgrenzen  $20 - c$  und  $20 + c$  für die Plattendicke gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss nicht mehr als 1% beträgt?