Mathematik III für Bauwesen
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
24. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G34 (Unabhängigkeit)

(a) Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Der weiße Würfel zeigt eine Drei.

B: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.

C: Die Augensumme der beiden Würfel ist durch vier teilbar.

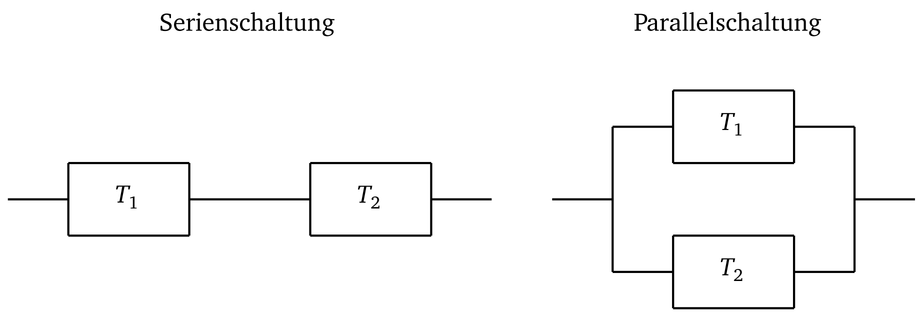
(i) Prüfen Sie die Ereignisse auf paarweise und vollständige Unabhängigkeit.

(ii) Finden Sie ein weiteres Ereignis D, so dass A und D unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Wahl.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Identität $P(A^C) = P(A^C \cap B) + P(A^C \cap B^C)$, dass aus der Unabhängigkeit von A und B auch die Unabhängigkeit von A^C und B^C folgt.

(c) Ein Gerät besteht aus zwei Bauteilen T_1 und T_2, bei denen unabhängig voneinander Defekte auftreten können. Nach einer bestimmten Betriebsdauer kann eines oder beide Bauteile ausgefallen sein. Es seien p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass T_1 bzw. T_2 intakt sind.

Man spricht von einer Serienschaltung der Bauteile T_1 und T_2, falls das Gerät genau dann funktionsfähig ist, wenn beide Bauteile intakt sind. Man spricht von einer Parallelschaltung der Bauteile T_1 und T_2, falls das Gerät genau dann funktionsfähig ist, wenn mindestens eines der Bauteile intakt ist.



Bestimmen Sie in beiden Fällen jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät funktionsfähig ist.
Setzen Sie dann $p_1 = p_2 = 0.9$ und vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe G35 (Binomial-Verteilung)

Zu Überprüfung einer Warenanlieferung aus einer großen Menge wurden folgende Vorschriften verwendet:
Die Sendung wird abgelehnt, falls in einer Stichprobe vom Umfang

(a) 15 mehr als ein fehlerhaftes Stück auftritt

(b) 30 mehr als zwei fehlerhafte Stücke auftreten.

Welche Methode bietet größere Sicherheit, eine Sendung abzulehnen, falls diese 10% Ausschuss enthält?

Aufgabe G36 (Poisson-Verteilung)
An einem lauschigen Augustabend werden durchschnittlich 6 Sternschnuppen pro Stunde beobachtet. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Anzahl X_t der in t Minuten beobachteten Sternschnuppen Poisson-verteilt ist, mit dem Parameter $\lambda = \frac{t}{\alpha}$ für $\alpha > 0$.

(a) Bestimmen Sie α.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Viertelstunde mindestens mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

Hausübung

Aufgabe H34 (Unabhängigkeit) (10 Punkte)

a) Vier Fußballspieler Nr. 1,2,3,4 schießen nacheinander auf eine Torwand. Die Schüsse finden dabei unabhängig voneinander statt. Es ist bekannt, dass dabei ihre Trefferwahrscheinlichkeiten $0 < p_1, p_2, p_3, p_4 < 1$ sind. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Spieler 1 und 2 treffen,
B: Spieler 3 und 4 treffen,
C: Spieler 2 und 3 treffen nicht.

Untersuchen Sie dieses System von Ereignissen auf paarweise Unabhängigkeit und vollständige Unabhängigkeit. (Dabei ist Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit durch mathematische Formeln und nicht aus der Anschauung heraus zu begründen.)

b) Nun schieße einer der Fußballer dreimal auf die Torwand. Für jeden Schuss sei die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0.5$.

i) Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Der erste Schuss ist ein Treffer.
B: Der zweite und dritte Schuss sind Treffer.
C: Es gibt eine gerade Anzahl von Treffern.

Untersuchen Sie auch hier das System von Ereignissen auf paarweise Unabhängigkeit und vollständige Unabhängigkeit.

ii) Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Die Anzahl der Treffer in den ersten beiden Schüssen ist gerade.
B: Die Anzahl der Treffer in den letzten beiden Schüssen ist gerade.
C: Der zweite Schuss ist kein Treffer.

Sind die Ereignisse vollständig unabhängig?

Hinweis zu b): 0 ist eine gerade Zahl.

Aufgabe H35 (Verteilung diskreter Zufallsvariable) (5 Punkte)
Ein Glücksrad hat die Felder 1,2,3,4 und 5, welche alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (d.h. $\frac{1}{5}$) auftreten. Es wird solange gedreht, bis zum ersten Mal eine 5 erscheint, jedoch wird höchstens siebenmal gedreht. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Versuche.

(a) Geben Sie die Verteilung von X in einer Tabelle an.

(b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zweimal, jedoch höchstens fünfmal drehen zu müssen.

Aufgabe H36 (Binomial-Verteilung und Poisson-Verteilung) (5 Punkte)
Ein Flugzeug Boeing B747 hat 234 Sitze in der Economy Class. Da der Fluggesellschaft aus Erfahrung bekannt ist, dass ein Passagier mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.5% nicht zum Abflug erscheint, werden 237 Buchungen vorgenommen. Wir nehmen an, dass die einzelnen Passagiere jeweils unabhängig voneinander zum Flug erscheinen oder nicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle zum Abflug erscheinenden Passagiere einen Sitzplatz erhalten jeweils über die folgenden Methoden:

(a) exakt unter Verwendung der Binomial-Verteilung,

(b) näherungsweise unter Verwendung der Poisson-Verteilung.