Mathematik III für Bauwesen
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
10. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Transformation von eindimensionalen Messreihen)
Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Messreihe und $\bar{x}$ das zugehörige arithmetische Mittel sowie $\tilde{x}$ der zugehörige Median.

a) Zeigen Sie: Werden die Werte der Messreihe gemäß $y_i = a \cdot x_i + b$ für $i = 1, \ldots, n$ linear transformiert, so gilt für das arithmetische Mittel $\bar{y}$ der transformierten Werte

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b,$$

d.h. das arithmetische Mittel der transformierten Werte ist gleich dem transformierten arithmetischen Mittel der ursprünglichen Werte.

b) Auf einer Touristikinsel in der Karibik wurden in den letzten beiden Juliwochen jeweils morgens zur gleichen Zeit die folgenden Lufttemperaturen in Grad Fahrenheit gemessen:

$$78 \quad 82 \quad 81 \quad 82 \quad 80 \quad 83 \quad 77 \quad 81 \quad 79 \quad 79 \quad 83 \quad 78 \quad 78 \quad 79.$$

Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur, d.h. das arithmetische Mittel der gemessenen Temperaturen sowohl in Grad Fahrenheit als auch in Grad Celsius. Bestimmen Sie auch den Median $\tilde{x}$ der Messreihe in Grad Fahrenheit und den Median $\tilde{y}$ der korrespondierenden Messreihe in Grad Celsius. (Beides kann durch eine Überlegung geschehen ohne alle Messwerte in Grad Celsius umzurechnen.)
Hinweis: x Grad Fahrenheit entsprechen $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ Grad Celsius.

c) Überlegen Sie sich ein Beispiel einer Messreihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und eine lineare Transformation $y_i = a \cdot x_i + b$ (wobei a, b zahlenmässig zu spezifizieren sind), so dass für die Mediane $\tilde{y} \neq a \cdot \tilde{x} + b$ gilt.
Bemerkung: Es existieren zwar solche Beispiele, jedoch ist der Unterschied zwischen $a\tilde{x} + b$ und $\tilde{y}$ meist unbedeutend. (warum?)

Aufgabe G29 (Zweidimensionale Messreihen)
Auf dem Darmstädter Wochenmarkt ist eine Erhebung über die Länge und das Gewicht von Salatgurken durchgeführt worden. Dabei erhielt man die folgenden Messwerte.

Länge x_i (in cm)	30	31	33	37	39	40
Gewicht y_i (in g)	595	610	625	640	655	715

Es ergeben sich folgende Summen

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 210, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 7440, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i = 3840, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 2466600, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 135210.$$

a) Stellen Sie die Messergebnisse in einem Punktediagramm zweidimensional dar.

b) Berechnen Sie zu der zweidimensionalen Messreihe die empirischen Varianzen und den empirischen Korrelationskoeffizienten. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs $y \approx a \cdot x + b$ zwischen den beobachteten Größen berechtigt?

c) Berechnen Sie die Regressionsgerade zu den Messdaten und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm aus Aufgabenteil (a) ein.

d) Geben Sie einen Prognosewert für das Gewicht einer Salatgurke der Länge 34 cm an.

Aufgabe G30 (Ergebnismengen und Ereignisse)
Ein Gerät setze sich aus drei Teilen zusammen, die sich in ihrer Funktionsweise nicht gegenseitig beeinflussen. Wir betrachten ein Zufallsexperiment, wobei für ein Gerät festgestellt wird, ob die drei Teile jeweils funktionsfähig oder defekt sind. Jedes Elementarereignis kann somit durch ein Tripel $(a, b, c) \in \{0, 1\}^3$ beschrieben werden. Zum Beispiel bedeutet das Tripel $(0, 0, 1)$, dass die ersten beiden Teile defekt sind und das dritte Teil funktionsfähig.
Wir betrachten die Ereignisse:

$$\begin{array}{lll} A_k & : & \text{„das } k\text{-te Teil funktioniert"} \quad (k = 1, 2, 3)\ , \\ B_j & : & \text{„genau } j \text{ Teile funktionieren"} \quad (j = 0, 1, 2, 3)\ , \\ C & : & \text{„mindestens zwei Teile funktionieren"}\ , \\ D & : & \text{„alle Teile funktionieren".} \end{array}$$

a) Geben Sie die entsprechende Ergebnismenge Ω an.

b) Stellen Sie das Ereignis D mittels der Ereignisse A_k $(k = 1, 2, 3)$ dar.

c) Bilden die Ereignisse B_j für $j = 0, 1, 2, 3$ eine Zerlegung von Ω?
(Zerlegung würde bedeuten, dass $\Omega = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt.)

d) Stellen Sie die Ereignisse B_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ und C mittels der Ereignisse A_k $(k = 1, 2, 3)$ dar.

e) Beschreiben Sie verbal (wie in Liste oben) die komplementären Ereignisse A_k^{C}, B_j^{C}, C^{C}, D^{C}.

Hausübung

Aufgabe H28 (Regressionsgerade) (6 Punkte)
Für die auf einer bestimmten Straße fahrenden Autos wurde n-mal jeweils die Autodichte x_i (Anzahl pro Meile) und die mittlere Geschwindigkeit der Autos v_i (Meilen pro Stunde) ungefähr ermittelt. Wir betrachten die zweidimensionalen Daten (x_i, y_i) mit $y_i := \sqrt{v_i}$. Aus den $n = 24$ Messdaten ergaben sich die Werte

$$\sum_{i=1}^{24} x_i = 2102, \quad \sum_{i=1}^{24} x_i^2 = 222028, \quad \sum_{i=1}^{24} y_i = 95, \quad \sum_{i=1}^{24} y_i^2 = 404, \quad \sum_{i=1}^{24} x_i y_i = 7328.$$

Teilergebnisse sollen im folgenden auf zwei Nachkommastellen gerundet werden!

a) Berechnen Sie den empirischen Korrelationskoeffizienten zu den zweidimensionalen Messdaten (x_i, y_i).

b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade $y = a \cdot x + b$ zu den zweidimensionalen Messwerten (x_i, y_i), d.h. geben Sie die Koeffizienten a, b als Zahlen an.

c) Geben Sie einen Prognosewert v^* für die mittlere Geschwindigkeit der Autos bei einer Autodichte von $x^* = 20$ an.

Aufgabe H29 (Ausgleichsrechnung mit Parabel) (8 Punkte)
Sind n zweidimensionale Messwerte (x_i, y_i) gegeben, welche ungefähr auf einer Parabel liegen, d.h.

$$y_i \approx a x_i^2 + b x_i + c \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

dann ist es sinnvoll durch Ausgleichsrechnung ein Polynom $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ zu bestimmen. Dabei soll die Fehlerquadratsumme

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a x_i^2 + b x_i + c))^2$$

minimiert werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ der Lösung dieses Problems durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ und $\beta_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i$ gegeben sind. Nutzen Sie hierfür die Bedingungen $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial c} = 0$.

(b) Bei einem Experiment wurden die folgenden Werte gemessen.

x_i	-3	-2	12	14	6	5	16	7	-1	-5
y_i	10.04	19.98	59.41	51.68	-3.44	-11.77	65.44	17.94	18.57	41.78

Nehmen Sie an, dass diese Messwerte ungefähr auf einer Parabel liegen und bestimmen Sie deren Koeffizienten.
Hinweis: Es ergeben sich folgende Summen

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 49, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 745, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^3 = 9091, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^4 = 129733, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i \approx 270, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i \approx 2232, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 y_i \approx 37133.$$

Aufgabe H30 (Ergebnismengen und Ereignisse II) (6 Punkte)
Wir betrachten zu Zufallsexperimenten die Ergebnismengen (auch: Ergebnisraum) und bestimmte Ereignisse.

a) Geben Sie für die folgenend Zufallsexperimente einen geigneten Ereignisraum an.
   i) In einer Urne liegen vier mit 1 bis 4 nummerierte Kugeln. Es werden zwei Kugeln mit einem Griff gezogen.
   ii) Zahlenlotto 6 aus 49, d.h. 49 Kugeln sind von 1 bis 49 durchnummeriert und es werden nacheinander sechs Kugeln gezogen ohne Zurücklegen.
   iii) Ein Fragebogen enthält vier Fragen, von denen jede mit einer Bewertungszahl 1,2,3,4, oder 5 bzw. durch 0 für keine Angabe beantwortet wird. (Das Beantworten der Fragen ist für den einzelnen nicht zufällig. Jedoch nehmen wir als Außenstehende dies als Zufallsexperiment an.)

b) Es seien A, B, C Ereignisse in einem (beliebigen) Ergebnisraum Ω, d.h. es gilt $A, B, C \subseteq \Omega$. Geben Sie die folgenden Ereignisse in einer Schreibweise mit Mengen an (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, etc.).
   i) Es tritt A ein, aber gleichzeitig weder B noch C.
   ii) Es treten genau zwei der drei Ereignisse A, B, C ein.
   iii) Es tritt höchstens eines der drei Ereignisse A, B, C ein.