Mathematik III für Bauwesen
9. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
20. Dezember 2010

Gruppenübung

Aufgabe G25 (Variationsrechnung)
Bestimmen Sie zur Minimierung der folgenden Funktionale J die zugehörige Euler-Lagrange-Dgl. und lösen Sie die Dgl. mit den jeweiligen Randbedingungen.

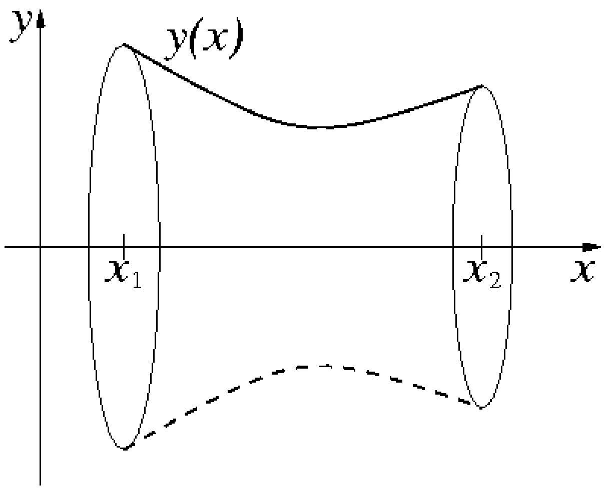
a) $J(y) = \int_0^1 2y(x) + y'(x)^2 \, dx, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 1,$

b) $J(y) = \int_0^1 y(x)^2 + y'(x)^2 \, dx, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = e,$

c) $J(y) = \int_{-1}^2 y'(x)^2 + x^2 y'(x) \, dx, \qquad y(-1) = 1, \quad y(2) = 0.$

Aufgabe G26 (Minimierung der Mantelfläche)

Gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$ mit vorgegebenen Randpunkten $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ wobei $y_1, y_2 > 0$, zu der bei Rotation um die x-Achse eine minimale Mantelfläche entsteht.



Dies bedeutet die Minimierung des Funktionals

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} (2\pi y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx.$$

Der Faktor 2π kann dann weggelassen werden. Wir wollen die Variationsrechnung auf dieses Problem anwenden.

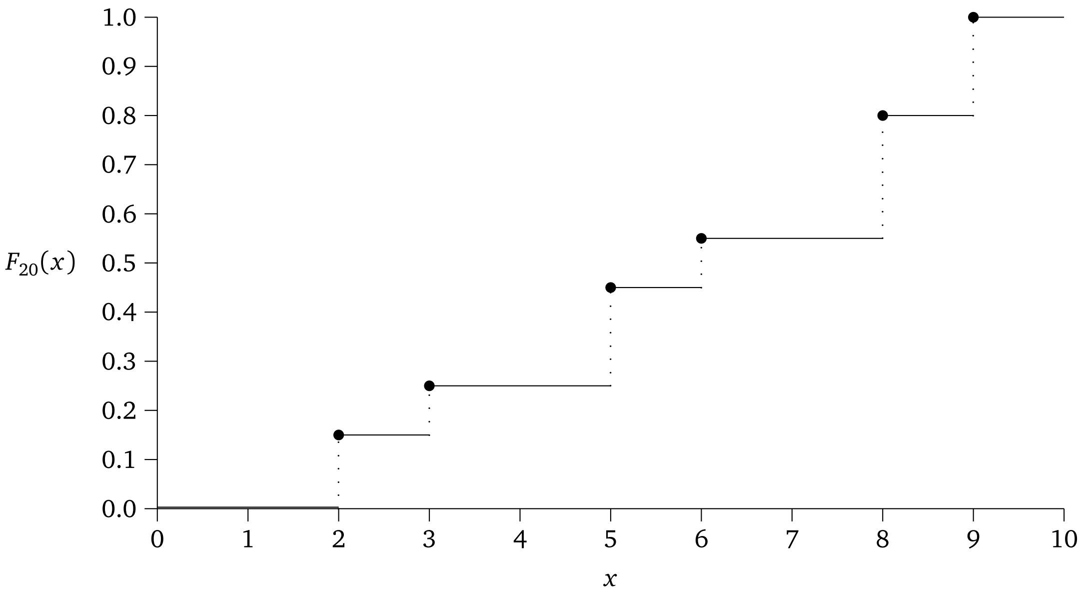
a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Dgl. zu diesem Minimierungsproblem.
Hinweis: Stellen Sie die Dgl. mit dem Hauptnenner $(1 + (y')^2)^{3/2}$ dar um eine einfache Formel zu erhalten.

b) Bestätigen Sie durch Differenzieren, dass die allgemeine Lösung der Dgl. aus Aufgabenteil (a) gegeben ist durch

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right) \qquad \text{für } C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Die Koeffizienten C_1, C_2 können so gewählt werden, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Eine explizite Formel hierfür existiert leider nicht.

Aufgabe G27 (Maßkennzahlen)
Zu einer Messreihe $x_1, \ldots, x_{20}$ wurde die folgende empirische Verteilungsfunktion skizziert:



a) Lesen Sie den größten und kleinsten Wert der Messreihe ab. Bestimmen Sie außerdem die relative Häufigkeit der Messwerte,
   1. die im Intervall $(2.3, 6.6]$ liegen,
   2. die größer als 3 sind.

b) Geben Sie die Quantile x_p zu $p = 0.3$, $p = 0.6$ und $p = 0.8$ an.

c) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Varianz der Messreihe.

d) Erstellen Sie einen Boxplot.

Hausübung

Aufgabe H25 (Quantitativ-diskrete Merkmale) (6 Punkte)
Beim Auszählen von Zellen in 50 Quadranten eines Hämazytometers ergaben sich die folgenden Werte:

1	2	2	2	4	4	4	5	5	5	2	1	2	2	7	6	7	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	6	6	2	3	3	3	3	3	6	7	7	7	5	2	2	2	7	9	9

(a) Fertigen Sie ein Stabdiagramm zu den relativen Häufigkeiten dieser Messwerte an und zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

(b) Lesen Sie das p-Quantil für $p = 0.2$ sowie $p = 0.76$ an der empirischen Verteilungsfunktion ab. Bestimmen Sie an Hand der geordneten Messreihe das empirische p-Quantil für $p = 0.25$, $p = 0.5$ und $p = 0.84$.

(c) Berechnen Sie die empirische Standardabweichung der Messreihe.

Aufgabe H26 (Quantitativ-stetige Merkmale) (6 Punkte)
Um die Versuchsdauer hinreichend kurz zu halten, wurden die Lebensdauern von $n = 100$ Transistoren unter verschärften Betriebsbedingungen gemessen (extrem hohe Temperatur und Luftfeuchtigkeit). Die gemessenen Lebensdauern bewegten sich im Bereich von 5 bis 40 Stunden (std). Dieser Bereich wurden in Klassen eingeteilt. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse, wobei k_i die absolute Klassenhäufigkeit und h_i die relative Klassenhäufigkeit beschreibt.

Klasse i	Klasse[std]	Mitte[std]	k_i	h_i	$\sum h_i$	h_i/Klassenbreite
1	$(5, 15]$		10			
2	$(15, 20]$		22			
3	$(20, 25]$		36			
4	$(25, 30]$		26			
5	$(30, 40]$		6			

a) Fügen Sie die fehlenden Einträge in die Tabelle ein.

b) Berechnen Sie den empirischen Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung. Verwenden Sie zur Berechnung die Mitten der Klassen.

c) Fertigen Sie ein Histogramm an und zeichnen Sie die empirischen Verteilungsfunktion. Die empirischen Verteilungsfunktion soll dabei die Sprungstellen an den linken Klassenrändern besitzen.

Aufgabe H27 (Grenzfall von äquidistanter Messreihe) (8 Punkte)
Es sei $I := [a, b]$ mit $a < b$ ein Intervall. Wir nehmen an, dass äquidistante Messwerte $x_1, \dots, x_n$ in I vorliegen, d.h.

$$x_j = a + j\,\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

(Dies ist eine idealisierende Annahme, da sich Messwerte in der Praxis nie derart verhalten werden. Jedoch können sie ungefähr ein solches Verhalten besitzen.)
Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die Streuung der Messwerte.
Leiten Sie den Grenzwert des arithmetischen Mittels und der empirischen Varianz im Fall $n \to \infty$ her. Bestimmen Sie ebenfalls die Grenzwerte der empirischen Verteilungsfunktion $F(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ im Fall $n \to \infty$.
Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$