Mathematik III für Bauwesen
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
13. Dezember 2010

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Fourier-Reihen)
Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen.

a) $f(x) = |\sin x|$,

b) $f(x) = (x-1)^2$ für $-\pi < x \leq \pi$ und 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Hinweis: $\sin(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(x-nx) + \sin(x+nx))$

Aufgabe G23 (Anfangs-Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung)
Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad x \in [0,\pi], \quad t \geq 0,$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und den Anfangsbedingungen für $x \in [0,\pi]$

$$u(x,0) = x^2 - \pi x.$$

Skizzieren Sie diese Anfangsbedingungen.
Geben Sie eine Formel für die Lösung des Anfangs-Randwertproblems an. Setzen Sie hierzu zunächst $u(x,0)$ zu einer *ungeraden* Funktion auf $[-\pi,\pi]$ fort und bestimmen Sie $u(x,t)$ mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung von $u(x,0)$.

Aufgabe G24
Die Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f lautet

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n, b_n seien gegeben.

a) Leiten Sie eine Formel für die Fourier-Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ der Funktion $\tilde{f}(x) := \alpha f(x) + \beta$ mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ her.

b) Bestimmen Sie eine Formel für die Fourier-Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ der verschobenen Funktion $\tilde{f}(x) := f(x-\varphi)$ mit der Phasenverschiebung $\varphi \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme $\cos(y \pm z) = \cos y \cos z \mp \sin y \sin z$ und $\sin(y \pm z) = \sin y \cos z \pm \sin z \cos y$.

Hausübung

Aufgabe H22 (Fourier-Reihen II) (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen.

a) $f(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$,

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ und 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Aufgabe H23 (Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung) (8 Punkte)
Berechnen Sie die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0,$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und den Anfangsbedingungen für $x \in [0, \pi]$

$$u(x, 0) = \sin^2(x), \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Setzen Sie hierzu zunächst $u(x, 0)$ zu einer *ungeraden* Funktion auf $[-\pi, \pi]$ fort und bestimmen Sie $u(x, t)$ mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung von $u(x, 0)$.

Aufgabe H24 (Konvergenzgeschwindigkeit) (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^2 - \pi x, \qquad x \in [0, \pi].$$

(a) Setzen Sie f einmal gerade und einmal ungerade auf $[-\pi, \pi]$ fort und bestimmen Sie jeweils die Fourierreihe.

(b) Vergleichen Sie die Fourierkoeffizienten. Welche der beiden Reihen nähert sich schneller an die zu approximierende Funktion an?