

Mathematik III für Bauwesen

7. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
6. Dezember 2010

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Klassifikation partieller Dgln.)

- a) Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung bezüglich der Art der auftretenden Linearität (linear, halblinear, quasilinear oder nichtlinear).

(i) $\sin(y)u_{xx} + u_{xy} - \frac{1}{2}u_{yy} = 2\cos(u_y)$

(ii) $e^{-x}u_{yy} + xy \cdot u_{xy} - u_y \cdot u_{xx} = 0$

(iii) $x \cdot u_{xx} - u_y \cdot u_{yy} + u_{xx}u_{xy} = 0$

(iv) $u_{xy} - y^2x^5u_x = (x + 3y)^3 + u_y - u$

- b) Bestimmen Sie den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch)

(i) $\frac{1}{4}u_{xx} - \frac{9}{2}u_{xy} + \frac{81}{4}u_{yy} = y^2 - u_xu_y$

(ii) $\frac{1}{5}u_{xx} + \frac{2}{3}u_{xy} + \frac{1}{2}u_{yy} = x^2u$

(iii) $\frac{1}{15}u_{xx} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}u_{yy} = \sin(u_y) \cdot u$

Aufgabe G20 (Produktansatz I)

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xt} = \beta u$$

mit einem reellen Parameter $\beta \neq 0$.

- a) Welche Form der Linearität liegt vor und welchen Typ hat diese Dgl.?
- b) Bestimmen Sie die Lösungen der Dgl. mittels des Produktansatzes $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$. Machen Sie für ihr erhaltenes Ergebnis eine Probe.
- c) Geben Sie die spezielle Lösung an, die die Anfangsbedingung $u(x, 0) = 2e^{-x}$ bei $t = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe G21 (Additiver Ansatz)

Gegeben sei die inhomogene Wellengleichung

$$c^2u_{xx} - u_{tt} = c \cdot e^{-2t}$$

mit der Wellengeschwindigkeit $c > 0$. Bestimmen Sie Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung mittels des additiven Separationsansatzes $u(x, t) = v(x) + w(t)$.

Hinweis: Es ist eine Gleichung herzuleiten, in der auf der linken Seite nur x als unabhängige Variable und auf der rechten Seite nur t als unabhängige Variable auftritt.

Hausübung

Aufgabe H19 (Klassifikation partieller Dgln.)

(7 Punkte)

- a) Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung bezüglich der Art der auftretenden Linearität (linear, halblinear, quasilinear oder nichtlinear).

(i) $3u_{xx} + u_{xy} - \frac{1}{2}u_{yy} = u^3$

(ii) $u_{tt} - u_x^2 \cdot u_{xx} = 0$

(iii) $u_{xx}^3 + 2u_{xy} + u \cdot u_{yy} = x + y$

(iv) $2u_{tt} - \frac{1}{3}u_{tx} - 5u_{xx} = x^2y + 4u$

- b) Bestimmen Sie den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch)

$$(2 + \alpha)u_{xx} - 2\alpha u_{xy} + u_{yy} = f(x, y)$$

in Abhängigkeit vom konstanten Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H20 (Produktansatz II)

(9 Punkte)

Wir betrachten die elliptische Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = u - u_x.$$

Bestimmen Sie möglichst viele linear unabhängige reelle Lösungen dieser Dgl. mit dem Produktansatz $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$.

Hinweis: Bei der Lösung der entstehenden gewöhnlichen Dgln sind Fallunterscheidungen bzgl. der Wahl der Separationskonstanten erforderlich.

Aufgabe H21 (Exponentialansatz)

(4 Punkte)

Bestimmen Sie Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} = -u - 2u_x$$

über den Exponentialansatz

$$u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Der Exponentialansatz ist ein spezieller Produktansatz wegen $e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta y}$.