

# Mathematik III für Bauwesen

## 7. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Roland Pulch  
Andreas Gärtner  
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011  
6. Dezember 2010

### Gruppenübung

**Aufgabe G19** (Klassifikation partieller Dgln.)

- a) Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung bezüglich der Art der auftretenden Linearität (linear, halblinear, quasilinear oder nichtlinear).

(i)  $\sin(y)u_{xx} + u_{xy} - \frac{1}{2}u_{yy} = 2\cos(u_y)$

(ii)  $e^{-x}u_{yy} + xy \cdot u_{xy} - u_y \cdot u_{xx} = 0$

(iii)  $x \cdot u_{xx} - u_y \cdot u_{yy} + u_{xx}u_{xy} = 0$

(iv)  $u_{xy} - y^2x^5u_x = (x + 3y)^3 + u_y - u$

- b) Bestimmen Sie den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch)

(i)  $\frac{1}{4}u_{xx} - \frac{9}{2}u_{xy} + \frac{81}{4}u_{yy} = y^2 - u_xu_y$

(ii)  $\frac{1}{5}u_{xx} + \frac{2}{3}u_{xy} + \frac{1}{2}u_{yy} = x^2u$

(iii)  $\frac{1}{15}u_{xx} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}u_{yy} = \sin(u_y) \cdot u$

**Aufgabe G20** (Produktansatz I)

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xt} = \beta u$$

mit einem reellen Parameter  $\beta \neq 0$ .

- a) Welche Form der Linearität liegt vor und welchen Typ hat diese Dgl.?  
b) Bestimmen Sie die Lösungen der Dgl. mittels des Produktansatzes  $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ . Machen Sie für ihr erhaltenes Ergebnis eine Probe.  
c) Geben Sie die spezielle Lösung an, die die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = 2e^{-x}$  bei  $t = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt.

**Aufgabe G21** (Additiver Ansatz)

Gegeben sei die inhomogene Wellengleichung

$$c^2u_{xx} - u_{tt} = c \cdot e^{-2t}$$

mit der Wellengeschwindigkeit  $c > 0$ . Bestimmen Sie Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung mittels des additiven Separationsansatzes  $u(x, t) = v(x) + w(t)$ .

*Hinweis:* Es ist eine Gleichung herzuleiten, in der auf der linken Seite nur  $x$  als unabhängige Variable und auf der rechten Seite nur  $t$  als unabhängige Variable auftritt.

---

---

## Hausübung

---

### Aufgabe H19 (Klassifikation partieller Dgln.)

(7 Punkte)

- a) Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung bezüglich der Art der auftretenden Linearität (linear, halblinear, quasilinear oder nichtlinear).

(i)  $3u_{xx} + u_{xy} - \frac{1}{2}u_{yy} = u^3$

(ii)  $u_{tt} - u_x^2 \cdot u_{xx} = 0$

(iii)  $u_{xx}^3 + 2u_{xy} + u \cdot u_{yy} = x + y$

(iv)  $2u_{tt} - \frac{1}{3}u_{tx} - 5u_{xx} = x^2y + 4u$

- b) Bestimmen Sie den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch)

$$(2 + \alpha)u_{xx} - 2\alpha u_{xy} + u_{yy} = f(x, y)$$

in Abhängigkeit vom konstanten Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe H20 (Produktansatz II)

(9 Punkte)

Wir betrachten die elliptische Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = u - u_x.$$

Bestimmen Sie möglichst viele linear unabhängige reelle Lösungen dieser Dgl. mit dem Produktansatz  $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ .

*Hinweis: Bei der Lösung der entstehenden gewöhnlichen Dgln sind Fallunterscheidungen bzgl. der Wahl der Separationskonstanten erforderlich.*

### Aufgabe H21 (Exponentialansatz)

(4 Punkte)

Bestimmen Sie Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} = -u - 2u_x$$

über den Exponentialansatz

$$u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$$

mit Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

*Bemerkung:* Der Exponentialansatz ist ein spezieller Produktansatz wegen  $e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta y}$ .