Mathematik III für Bauwesen
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
29. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G16 (System linearer Differentialgleichungen)
Gegeben sei das System aus drei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Die enthaltene Matrix ist ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems, d.h. die Menge aller Lösungen.

(b) Geben Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = (2, 2, 1)^\top$ an.

Aufgabe G17 (System linearer Differentialgleichungen II)
Bestimmen Sie die Menge aller *reellen* Lösungen zu dem System aus linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Aufgabe G18 (Randwertproblem)
Untersuchen Sie für welche Werte des Parameters $r \in \mathbb{R}$ die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$4y''(x) + y(x) = r \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right), \qquad x \in [0, 2\pi]$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad y(\pi) = 1$$

reelle Lösungen besitzt und geben Sie für diese Parameter alle reellen Lösungen an.

Hausübung

Aufgabe H16 (System aus vier linearen Differentialgleichungen) (5 Punkte)
Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem zu dem System aus linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Aufgabe H17 (Differentialgleichungen n-ter Ordnung und äquivalentes System 1. Ordnung) (8 Punkte)
Gegeben sei die (homogene) lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung.

(b) Überführen Sie die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung in ein System aus drei Differentialgleichungen erster Ordnung. In diesem Fall ergibt sich eine diagonalisierbare Koeffizientenmatrix mit reellen Eigenwerten. Bestimmen Sie dann die Menge aller Lösungen des Systems. Vergleichen Sie die erhaltenen Lösungen mit den Lösungen aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe H18 (Randwertprobleme) (7 Punkte)
Für $x > 0$ betrachten wir die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch die beiden Lösungen

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x^2.$$

Untersuchen Sie die Randwertprobleme, die sich bei den folgenden Randbedingungen ergeben, auf ihre Lösbarkeit. Bestimmen Sie dabei gegebenenfalls die Menge der Lösungen des Randwertproblems.

(a) $y(1) = 5, \quad y(3) = 39,$

(b) $y'\left(\frac{3}{2}\right) = 2, \quad y(3) = 7,$

(c) $3\,y\left(\frac{1}{3}\right) - y'\left(\frac{1}{3}\right) = 5, \quad y(3) - 3\,y'(3) = 81.$