Mathematik III für Bauwesen
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
22. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{y}{x} = 0, \quad x > 0.$$

(a) Welche der folgenden Funktionspaare bilden ein Fundamentalsystem dieser Gleichung?
   (i) $y_1(x) = \mathrm{e}^x(x-2), \quad y_2(x) = 3x + 6.$
   (ii) $y_1(x) = \mathrm{e}^x(x-2), \quad y_2(x) = x - 3.$
   (iii) $y_1(x) = \mathrm{e}^x(x-2), \quad y_2(x) = 4 + 2x - 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$
   Hinweis: Nur Lösungen der DGL können ein Fundamentalsystem bilden.

(b) Bestimmen Sie nun diejenige Lösung der obigen Differentialgleichung, welche zusätzlich den Anfangsbedingungen $y(2) = 8, y'(2) = 2 + \mathrm{e}^2$ genügt.

Aufgabe G14 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)
Gegeben sei die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = b(x).$$

mit der rechten Seite $b(x)$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung ($b(x) \equiv 0$).
   Hinweis: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung jeweils für die beiden rechten Seiten
   (i) $b(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
   (ii) $b(x) = \mathrm{e}^x$.

Aufgabe G15 (Variation der Konstanten)
Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung dritter Ordnung

$$L(y) = \frac{\ln(x)}{x} \quad (x > 0)$$

mit dem Differentialoperator

$$L(y) := x^2 y''' - 2y'.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch die drei Funktionen $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^3$, $y_3(x) = \ln(x)$ ein Fundamentalsystem zur homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ gegeben ist .

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.
   Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}$

Hausübung

Aufgabe H13 (Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung) (7 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine *reelle* Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen:

(a) $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0$,

(b) $2y'''' - 8y''' - 10y'' = 0$.

Hinweis: Eine Nullstelle bei (a) kann man erraten.

Aufgabe H14 (Ansatz vom Typ der rechten Seite) (8 Punkte)
Gegeben sei die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + 4y' = b(x).$$

mit der rechten Seite $b(x)$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung ($b(x) \equiv 0$).

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung jeweils in den Fällen

  (i) $b(x) = x\mathrm{e}^{3x}$,

  (ii) $b(x) = \sin(2x)$,

  (iii) $b(x) = x\mathrm{e}^{3x} + \sin(2x)$.

Aufgabe H15 (Variation der Konstanten) (5 Punkte)
Wir berachten die Differentialgleichung

$$x(x+1)y'' - (2x+1) \cdot y' + 2y = x, \quad x > 0.$$

Ein Fundamentalsystem der homogenen DGL ist gegeben durch

$$\{(x+1)^2, x^2\}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.