

Mathematik III für Bauwesen

4. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
15. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

(a) Bestimmen Sie zwei beliebige Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = 2y^3.$$

Da nur zwei Lösungen verlangt sind können Sie Integrationskonstanten bzw. freie Parameter so wählen, dass die Rechnungen möglichst einfach werden.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$$

durch Angabe der Umkehrfunktion $x(y)$. Bestimmen Sie dann eine spezielle (selbst gewählte) Lösung $y(x)$.

(c*) Transformieren Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + y' = x + 2$$

in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Geben Sie damit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung an.

Aufgabe G11 (Näherungslösung von Differentialgleichung zweiter Ordnung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y + 1, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

Berechnen Sie $y(2.6)$ näherungsweise mit dem Euler-Verfahren (Differenzenverfahren) mit Schrittweite $h = 0.2$.

Aufgabe G12 (Produktansatz)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x \cdot y'' - (x + 1) \cdot y' + y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der speziellen Lösung $y_1(x) = e^x$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Lösung des Anfangswertproblems, die die Werte $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ annimmt.

Hausübung

Aufgabe H10 (Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

(10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = (y + 1)y', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

(b) Bestimmen Sie zwei beliebige Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\cos(y)}{(\sin(y))^3}.$$

Da nur zwei Lösungen verlangt sind können Sie Integrationskonstanten bzw. freie Parameter so wählen, dass die Rechnungen möglichst einfach werden.

Aufgabe H11 (Näherungslösung von Differentialgleichung zweiter Ordnung)

(5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \sin(y), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Berechnen Sie näherungsweise $y(0.3)$ mittels des im Skript angegebenen Differenzenverfahrens (Euler-Verfahren) mit der Schrittweite $h = 0.1$ im Intervall $x \in [0, 0.3]$. Geben Sie dabei die Zwischenergebnisse und das Endergebnis jeweils mit 4 Nachkommastellen an.

Aufgabe H12 (Produktansatz)

(5 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0, \quad x \in (0, \infty).$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der speziellen Lösung $y_1(x) = x$.