Mathematik III für Bauwesen
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
08.November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Euler-Verfahren)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + x + y^3, \quad y(0) = 0.$$

Bestimmen Sie näherungsweise $y(0.2)$ durch Anwendung des Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h = 0.1$. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem korrekten Wert $y(0.2) = 0.2205\ldots$.

Aufgabe G8 (Potenzreihenansatz)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der Potenzreihe.

(b) Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Aufgabe G9 (Näherungsverfahren über Trapezfläche)
Gegeben sei das allgemeine Anfangswertproblem einer Dgl. erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = 0.$$

Der Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung liefert

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)\,\mathrm{d}x = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$$

mit einer Schrittweite $h > 0$.
Approximieren Sie die Fläche dieses Integrals durch ein einzelnes Trapez. (Skizze)
Leiten Sie dann ein Näherungsverfahren der Form $u_{j+1} = u_j + \cdots$ her, indem Sie den unbekannten Wert $y(x_0 + h)$ in der Approximation des Integrals durch eine Näherung mit gegebenen Größen ersetzen.
Testen Sie das Verfahren am Beispiel aus Aufgabe G7.

Hausübung

Aufgabe H7 (Näherungsverfahren) (7 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \big(\sin(x+y)\big)^2, \qquad y(1) = 1.$$

Es soll jeweils eine Näherung für den Lösungswert $y(2)$ mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ berechnet werden. (Taschenrechner mit Rundung der Zwischenergebnisse auf drei Nachkommastellen)

(a) Verwenden Sie das Euler-Verfahren.

(b) Verwenden Sie das Runge-Kutta-Verfahren.

Alle Zwischenergebnisse sind anzugeben, d.h. auch alle Auswertungen der rechten Seite der Differentialgleichung. Vergleichen Sie die Endergebnisse mit der exakten Lösung $y(2) = 1.2527\ldots$.

Aufgabe H8 (Euler-Verfahren bei Integral) (5 Punkte)
Zu einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ definieren wir die Funktion $y(x)$ durch

$$y(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Differentiation liefert das einfache Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x), \qquad y(x_0) = 0.$$

Auf dieses Anfangswertproblem soll das Euler-Verfahren angewendet werden. Stellen Sie die Formel für die Näherung $u_N \approx y(b)$ mit $b > x_0$ auf, wobei N Schritte im Verfahren gemacht werden. Begründen Sie, dass für $N \to \infty$ die Näherungen u_N gegen die exakte Lösung $y(b)$ konvergieren.

Aufgabe H9 (Potenzreihenansatz) (8 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = \ln(1+x)\cdot y\,, \quad y(0) = 1 \quad \text{mit } |x| < 1.$$

(a) Lösen Sie das AWP durch Trennung der Variablen.
Werten Sie die Lösung an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus (Taschenrechner).
Hinweis: Die Stammfunktion der Logarithmusfunktion ist

$$\int \ln(z)\,\mathrm{d}z = z\cdot\ln(z) - z + C.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes sowie der Potenzreihe für die Logarithmusfunktion die ersten fünf Glieder $a_0, \ldots, a_4$ der Potenzreihe der Lösung $y(x)$ des AWPs. Werten Sie die so erhaltenen Polynome $P_3(x)$ 3. Grades (mit $a_0, \ldots, a_3$) und $P_4(x)$ 4. Grades (mit $a_0, \ldots, a_4$) an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus. (Taschenrechner)
Hinweis: Die Potenzreihe der Logarithmusfunktion lautet

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \text{für } |x| < 1.$$