Mathematik III für Bauwesen
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
01. November 2010

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Bernoullische Differentialgleichungen)
Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$e^x\, y' = -\tfrac{1}{3} e^x\, y - \tfrac{1}{3} y^4.$$

(a) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe G5 (Exakte Differentialgleichungen)
Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x - y^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + (y^2 - x)y' = 0. \quad (\star)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(\star)$ nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(y)$, so dass die Differentialgleichung

$$\mu \cdot (1 + (y^2 - x)y') = \mu + \mu(y^2 - x)y' = 0$$

exakt ist.

(c) Geben Sie die implizite Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $(\star)$ an.

Aufgabe G6 (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen)
Wir betrachten das Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Offensichtlich ist die konstante Funktion $y = 0$ eine zugehörige Lösung.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(y) = \sqrt{|y|}$ nicht Lipschitz stetig auf einem Intervall $y \in [-A, A]$ für beliebiges $A > 0$ ist. Untersuchen Sie, ob $f(y)$ für $y \in [-A, A]$ stetig differenzierbar ist.

(b) Verifizieren Sie, dass die Funktionen

$$y_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - c)^2 & \text{für } x \geq c \\ 0 & \text{für } x < c \end{cases}$$

mit beliebigem $c \geq 0$ jeweils Lösungen des Anfangswertproblems sind. Skizzieren Sie diese Lösungen.

(c) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a) und (b) in Bezug auf die Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Hausübung

Aufgabe H4 (Anfangswertproblem von Bernoullischer Differentialgleichung) (6 Punkte)
Gegeben sei folgendes Anfangswertproblem einer Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' + 4\frac{y}{x} - \frac{1}{2}x\sqrt{y} = 0, \qquad y(4) = 4.$$

Zu diesem Anfangswertproblem existieren zwei Lösungen. Bestimmen Sie diese.

Aufgabe H5 (Exakte Differentialgleichungen II) (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der exakten Differentialgleichung

$$e^x + \cos(y) - x\,\sin(y)\,y' = 0.$$

(b) Leiten Sie zu der (nicht-exakten) Differentialgleichung

$$x^2 + y - xy' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$ her. Lösen Sie damit die Differentialgleichung.

Aufgabe H6 (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen II) (6 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = xy^3, \quad y(0) = 1.$$

Eine Lösung hierzu ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Begründen Sie, dass die Lösung eindeutig ist.

(b) Bestimmen Sie mit dem Satz von Peano bezüglich des Rechtecks $R = [-2,2] \times [0,2]$ (d.h. $x \in [-2,2]$ sowie $y \in [0,2]$) ein Intervall $x \in [-\alpha, \alpha]$ auf dem die Existenz einer Lösung garantiert ist.

(c) Auf welchem Intervall (bezüglich x) existiert die Lösung $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zum Anfangswertproblem? Vergleichen Sie dieses Intervall mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil (b).