Mathematik III für Bauwesen
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roland Pulch
Andreas Gärtner
Florian Seib

Wintersemester 2010/2011
25. Oktober 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Richtungsfeld)
Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt $y' = f(x, y)$ schreibt für jeden Punkt (x, y) einer Lösungskurve $y(x)$ eine Steigung $f(x, y)$ vor. Eine Veranschaulichung der Differentialgleichung ist somit durch eine Skizze des korrespondierenden **Richtungsfeldes** möglich: Hierzu zeichnet man in einigen Punkten (x, y) ein kurzes Geradenstück (das als **Linienelement** bezeichnet wird) mit der Steigung $f(x, y)$. Eine Lösungskurve $y = y(x)$ muss so durch das Richtungsfeld laufen, dass das Linienelement in jedem Punkt $(x, y(x))$ tangential an die Kurve ist.
Für eine Zeichnung des Richtungsfeldes ist es günstig, wenn man sich für einige Werte $c \in \mathbb{R}$ überlegt, wo die Linienelemente mit Steigung c liegen. Diese sogenannten **Isoklinen** („Kurven mit gleicher Steigung der Linienelemente") erhält man aus der Gleichung

$$f(x, y) = c.$$

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 1 + x + y.$$

(a) Berechnen Sie die Isoklinen.

(b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld durch Eintragen der Linienelemente in den Punkten (x, y) mit diskreten Werten $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Zeichnen Sie einige Isoklinen und Lösungskurven ein.

(c) Bestimmen Sie anhand der Skizze diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = -2$ erfüllt und prüfen Sie das Ergebnis durch eine Probe. Welche Besonderheit fällt an dieser Lösung auf?

Aufgabe G2 (Trennung der Veränderlichen)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Trennung der Veränderlichen und verifizieren Sie Ihre Lösung anschließend durch Differenzieren.

(a) $y' = y^4, \quad y(9) = -\frac{1}{3},$

(b) $y' = xy^2 + x, \quad y(0) = 1.$

Aufgabe G3 (Inhomogene lineare Differentialgleichung I)
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'x + y = 1 + x \quad (x > 0), \quad y(1) = 2.$$

(a) Lösen Sie die korrespondierende homogene Differentialgleichung, d.h. bestimmen Sie die Menge aller Lösungen.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Anfangswertproblems der inhomogenen Differentialgleichung.

Hausübung

Aufgabe H1 (Anfangswertproblem von Differentialgleichung) (7 Punkte)
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{1 + \frac{1}{2}x}, \qquad y(0) = 1.$$

Aufgabe H2 (Inhomogene lineare Differentialgleichung II) (7 Punkte)
Gegeben sei die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' + \cos(x)\, y = 3\cos(x).$$

(a) Lösen Sie die korrespondierende homogene Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

Bestimmen Sie in beiden Fällen die Menge aller Lösungen.

Aufgabe H3 (Klassifikation von Differentialgleichungen) (6 Punkte)
Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen nach den Kategorien *gewöhnlich* oder *partiell* sowie *linear* oder *nichtlinear*. Stellen Sie auch jeweils die Ordnung der Differentialgleichung fest.

1. $y'' + xy^2 + x^3 = 0$
2. $y^2 \cdot z_{xx} + 2xy \cdot z_{xy} + x^2 \cdot z_{yy} = 0$
3. $y' = \sin(y) + x^2$
4. $z^2 \cdot z_x + x \cdot z_y = \frac{1}{x^2+y^2}$
5. $\cos(x)y''' + x^2 y' = \sin(x)$
6. $y' = y + \frac{y}{x^2} + \sqrt{x}$